Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

DE

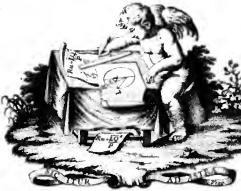
VIRIBUS

CENTRALIBUS,

Quibus corpora per ſectiones conicas volvuntur, centro virium in foco manente, brevis ac facilis expoſitio in capita ſex diſtributa.

OPUSCULUM

Eorum gratia conſcriptum, qui ad Nevtonianorum physicam introduci volunt.



BONONIÆ

Ex Typographia Lælii a Vulpe.)(1762)(

Superiorum auctoritate.

FRANCISCUS MARIA ZANOTTUS

TORQUATO VARENO

Adoleſcenti ſuaviſſimo, atque optimo

S. P. D.

Quidam ſunt, nec ita pauci, quod tibi jam, mi Torquate, per ætatem cognoſcere vix licet, qui in iſto, in quo tu verſaris, phyſicæ ſcientiæ curriculo magni Nevtoni nomine uſque adeo ſe ſinunt abripi, ut quem numquam fortaſſe legerint, cujuſque ne unam quidem propoſitionem demonſtrare poſſint, ſi velint, eum tamen ſe unice admirari prædicent, & in deliciis habere. Quorum rationem etſi probare nullo modo poſſum, non omnino tamen, quod multi faciunt, velim reprehendere; ac potius, quod Nevtonum ament, laudem; quod ejus doctrinam minus teneant, ignoſcam. Id enim non tam ipſorum ſegnitie fieri arbitror, quam illorum ingenio, qui nobiliſſima ac prope divina ſummi Philoſophi inventa tractaverunt. Hi ſiquidem, ut mathematici fere ſunt excellentiſſimi, indulgentes ſibi, vagantur interdum latius, nec niſi per exquiſitiora artificia longeque petita, ad ea, quæ phyſicorum ſunt, accedunt. Quæ phyſici quidem, ſi paucos excipias, vix poſſint aſſequi. Sunt enim plerique a geometria, atque algebra haud ſatis inſtructi, quippe qui naturalium rerum ſtudio abrepti mathematicos ſe eſſe mediocres facile patiuntur. Atque his quidem, quoniam Nevtoniani quoquo modo eſſe volunt, gratum ſit, puto, ſi qui leges omnes atque hypotheſes, quibus natura nequaquam utitur, prætermittens, ea ſtatim, quæ phyſicæ conjunctiora ſunt, arripiat, & in unum colligens ſecernat ab aliis, & minus ingenioſe tractet. Id ego ſuperioribus menſibus, cum valetudinis mihi atque otii ſatis eſſet, ex aliqua parte tentare decrevi. Libellum ergo confeci de viribus centralibus, ut in ſectionibus conicis maxime ſe produnt, qui locus philoſophiæ Nevtonianæ ſummam fere continet, eſtque ad phyſicas cæleſtium corporum converſiones explicandas aptiſſimus. Omnia vero, quæ quidem in illo argumento prima ſunt, breviſſimis calculis minimeque artificioſis comprehendere conatus ſum, ut, quantum ſimplicitas poſſit, experirer. Quid profece-

rim, tute videris. Libellum enim tibi inſcriptum ad te mittere decrevi, ut teſtem haberes amoris erga te mei. Quod ſi illum cum præceptore tuo, quem vehementer ſuſpicio, & in pauciſſimis ſane numero, per otium communicaveris, meque, ſi quid vobis erraſſe videbor, pro amicitia noſtra monueris, tam gratum erit quam quod gratiſſimum; nam quamvis mathematicis concedi non ſoleat, ut timeant ne errent, id mihi tamen concedi volo homini non mathematico. Ceterum quamvis brevitatem ubique ſtuduerim, non eam tamen exſpectes velim, quam plerique, docti præſertim homines atque induſtrii, conſectantur, quæque cum elegantiori quodam artificio conjuncta eſſe ſolet. Quæ enim ſic explicantur, etſi ſunt brevia, moram tamen legentibus ſæpe afferunt, neque rem ſtatim cognoſci ſinunt; itaque multos deterrent. Quare illud etiam curavi, quantum potui, ut eſſem ſine artificio brevis. Tuum erit elegantiam brevitati addere, putabiſque me hunc locum induſtriæ tuæ relinquere voluiſſe. Sic enim exiſtimo, adoleſcentulos, ingenioſos præſertim tuique ſimiles, non omni labore, ut multi jam putant, levandos eſſe, ſed exerceri oportere, eorumque ingenia torqueri paululum, quo ſiant acutiora.

Sed jam quæres, quæ te ſcire oporteat, antequam ad libellum hunc noſtrum legendum accedas. Perpauca, mi Torquate. Communis ſcilicet geometriæ elementa ſcias velim; & ſectionum conicarum definitiones, primaſque proprietates tantum non ignores. Quod ſi quæ erunt, quas te nondum vidiſſe ſuſpicer, de iis ſuo loco monebo. Sis etiam volo a communi Carteſianorum algebra paulo inſtructior, neque tractandarum æquationum ratio te fugiat. In quo quidem te jam inter æquales tuos excellere & intelligo, & magnopere gaudeo.

Ex illa vero reconditiori geometria, qua nihil his temporibus eſt illuſtrius, quæque infiniteſimalis dici ſolet, ſatis erit, ſi illud teneas, quod in ea diſciplina primum eſt, quantitatem infiniteſimam pro nulla haberi poſſe, ſi cum ea comparetur, ad quam infiniteſima eſſe dicitur; itaque æqualia eſſe quæcumque differentiam tantum habent infiniteſimam. Neque, ſi quantitatem infiniteſimam poſueris, refugias aliam rurſum ponere, quæ ſit ad eam, quam poſuiſti, infiniteſima; eoque modo ad infinitos infiniteſimorum ordines alios aliis inferiores excurras. Quod unum ſi animo comprehenderis, facile etiam intelliges & curvam quamvis lineam perinde haberi poſſe, ut ſi ex infinitis li-

neo-

neolis rectis conſtaret; & unamquamque ex his lineolis, ſi producatur, tangentem eſſe; & angulum, quem linea tangens cum curva facit, eſſe infiniteſimum. Neque omnino, ſi quantitas proponatur, cujuſcumque tandem ſit generis, quæ perpetuo variet, eam recuſabis perinde accipere, ac ſi variet per intervalla infiniteſima; ſit vero in unoquoque intervallo conſtans. Velut, ſi corpus in motu poſitum velocitatem perpetuo variet, hanc putabis in tempuſculis aliis aliam eſſe, in unoquoque conſtantem. Quæ quidem expeditiſſima ei ſint, qui ſe in Leibnitianorum calculo aliquantulum exercuerit; quapropter ſi hunc etiam attigeris, in eoque paululum progreſſus fueris, quantulumcumque id ſit, haud erit inutile.

Jam vero quoniam monere te cæpi, hæc etiam habe: Æquationes tibi in hoc, quem ad te mittimus, libro ſæpe occurrent, non omnino illarum ſimiles, quæ in geometricis quæſtionibus tractandis occurrere paſſim ſolent; hæ quippe duarum quantitatum æqualitatem exprimunt; noſtræ illæ analogiam, ſive proportionalitatem potius quamdam. Velut ſi poſuero $u = x$, *ſit autem mihi* u *velocitas,* x *vero linea quæpiam; velocitatem utique non æqualem lineæ eſſe, ſed proportionalem intelligam; quod ambæ ſcilicet, cum linea, tum velocitas, eadem proportione perpetuo varient. In his ergo æquationibus, quod tute vides, multiplicari pars altera per conſtantem quamlibet quantitatem poterit, ſalva æquatione; nam quamvis ea multiplicatione æqualitas tollatur, proportionalitas non tollitur. Neque minus licebit, utramque partem per eamdem quantitatem multiplicare, nam ne hoc quidem tollitur proportionalitas. Quin & radices ambarum partium extrahi tuto poterunt, & quadrata fieri; ſi enim quantitates ipſæ proportionales inter ſe ſunt, oportet ſane & earum radices proportionales inter ſe eſſe, & quadrata.*

Et quoniam in quæſtionibus, quæ per hujuſmodi æquationes tractantur, non niſi proportionalitas quædam quæri ſolet, liberum cuique erit, ſi quantitates duæ proportionales inter ſe fuerint, alteram alteri ſubſtituere pro voluntate, puta circumferentiæ diametrum, ſive radium, ſeu quidquid aliud proportionale circumferentiæ eſt.

Neque vero in explicandis, conſtruendiſque quantitatum valoribus generum te offendat diverſitas: velut ſi certum ſpatium propoſuero diviſum per tempus quodpiam, idque dixero

velo-

Digitized by Google

velocitatis cujuſdam menſuram eſſe; in quo nè te illud turbet, quod tempus & ſpatium genere ipſo inter ſe diſtant; velocitas autem genus tertium eſt. Nam & ſpatium certam habet in ſuo genere unitatem, ad quam ſi referatur, numero poſſit exprimi, & tempus pariter in ſuo genere unitatem habet ſuam. Quod ſi tempus & ſpatium ad unitatem unumquodque ſuam referantur, & numeris exprimantur, exiſtet ex horum diviſione numerus, quem pro velocitatis menſura habeas.

Preſſius hæc dixi, non enim docere te volui, ſed tantum monere. Tu autem eo ingenio es (quod & per me ipſe alias cognovi, & omnes, qui iſtinc ad nos veniunt, quique tecum fuerunt, teſtantur) ut fortaſſe ne moneri quidem opus habeas. Vale, mi Torquate, & quantum ego te diligo, tantum fac, ut me abs te diligi intelligam.

DE

Digitized by Google

DE VIRIBUS CENTRALIBUS,

QUIBUS CORPORA PER SECTIONES CONICAS VOLVUNTUR,

AD TORQUATUM VARENUM,

PROLEGOMENA.

De motu generatim.

ANtequam vires centrales exponere ingredior, non alienum erit, mi Torquate, pauca quædam monere, eorum præſertim cauſa, qui mechanicarum rerum ſunt plane rudes; nam quamvis expeditiſſima ſint, ac prope in medio poſita; iis vero, qui rem mechanicam vel leviter attigerunt, paratiſſima; tamen, quia ſunt neceſſaria, non videntur prætermittenda. Exordiar a motu, quem generatim primum, & quatenus tantum motus eſt, conſiderabo.

1. In corpore, quod movetur, tria præſertim veniunt conſideranda, maſſa corporis, velocitas, vis motrix. Ac maſſa quidem nihil eſt aliud niſi materia, qua corpus conſtat. Materia autem omnis eo ingenio eſſe creditur, ut quem motum ſemel acceperit, niſi ſi quid extrinſecus intercedat, eumdem perpetuo ſervet.

2. Velocitas eſt diſpoſitio corporis ad certum ſpatium certo tempore conficiendum. Eaque tanto major eſſe cenſetur, quanto majus eſt ſpatium, & quanto minus eſt tempus. Velocitatem ergo recte exprimes dividendo ſpatium per tempus. Sit velocitas $= V$. Spatium $= S$. Tempus $= T$. Erit $V = \frac{S}{T}$.

3. Hinc ſequitur, ut ſpatium ſit velocitas ipſa ducta in tempus; ſi enim eſt $V = \frac{S}{T}$, erit etiam $S = VT$.

4. Se-

4. Sequitur etiam, ut tempus ſit ſpatium diviſum per velocitatem; ſi enim eſt $V = \frac{S}{T}$, ut modo diximus; erit etiam $T = \frac{S}{V}$.

5. Porro cum velocitas exprimatur ſpatio diviſo per tempus, ſatis conſtat, velocitates eſſe ſpatiis proportionales, ſi tempora quidem ſint æqualia; ac viciſſim tempora æqualia eſſe, ſi velocitates proportionales ſint ſpatiis.

6. Conſtat etiam, velocitates æquales inter ſe eſſe, ſi ſpatia ſint temporibus proportionalia. Hæc atque alia vel leviter attendenti ſua ſponte ſe produnt.

7. Vis motrix eſt vis illa, quæ velocitatem creat in corpore; ac tanto major eſſe cenſetur, quanto eſt major velocitas, quam creat; & ſimul quanto major eſt maſſa corporis, in quo illam creat; itaque vim motricem recte exprimes multiplicando maſſam per velocitatem. Sit ergo corporis maſſa $=$ M. Velocitas $=$ V. Erit vis motrix $=$ MV.

8. Hinc multa profluunt uſque adeo manifeſta, ut demonſtrationem non deſiderent. Ac primum cum ſit vis motrix, uti dixi, $=$ MV, ſtatim conſtat, vires eſſe maſſis proportionales, ſi velocitates quidem æquales ſint; ac ſi æquales ſint maſſæ, eſſe vires proportionales velocitatibus.

9. Neque minus conſtat, haberi velocitatem corporis, ſi vis dividatur per maſſam; & ſimiliter haberi maſſam, ſi vis dividatur per velocitatem.

10. Quod ſi vires duæ ſint æquales, cum ſit utraque productum maſſæ & velocitatis, erunt ſane maſſæ reciproce proportionales velocitatibus; & viciſſim ſi fuerint maſſæ reciproce proportionales velocitatibus, oportebit vires æquales eſſe. Hæc de motu generatim dixiſſe ſatis ſit.

De motu compoſito.

Fig. 1. 11. Agatur corpus A uno tempore duabus viribus duas diverſas directiones AB, AC habentibus. Sume lineas duas AB, AC proportionales ipſis viribus, tum parallelogrammum BC confice. Feretur corpus, quod omnes conſentiunt, per diagonalem AD, ea quidem vi, quam linea ipſa AD exprimet.

12. Vis, qua corpus fertur per AD, dicitur vis compoſita.

ſita. Motus quoque ipſe per A D motus compoſitus appellatur. Vires A B, A C, nec non & motus ipſi per lineas A B, A C, dicuntur componentes.

13. Quoniam vis compoſita A D, & vires componentes A B, A C in eadem maſſa conſiderantur, ſequitur, ut velocitatibus proportionales ſint (8.). Et quoniam proportionales quoque ſunt lineis A D, A B, A C, ſequitur ut etiam velocitates ſint lineis eiſdem proportionales. Quo ergo tempore percurrit corpus lineam A D vi compoſita, eodem tempore percurreret lineam A B, ſi ſola vi A B ageretur; & lineam A C, ſi ageretur ſola vi A C (5.).

14. Quod ſi virium tum compoſitæ, tum componentium directiones A D, A B, A C datæ fuerint, nihil erit expeditius, quam tres lineas conſtituere, quæ vires ipſas, ideoque etiam velocitates exprimant. Nempe ſi a quovis puncto D directionis A D ducantur lineæ D C, D B parallelæ directionibus A B, A C, compleaturque parallelogrammum B C. Etenim lineæ tres A D, A B, A C, ut facile apparet, vires ipſas exprimentes, A D quidem vim compoſitam, A B, A C vires componentes.

Permulta ab auctoribus de motu compoſito tradi ſolent, elegantia illa quidem, ſed ad ea, quæ de viribus centralibus dicenda nobis ſunt, minus neceſſaria. His ergo omnibus ſuperſedebimus.

De vi attractiva.

15. VIs attractiva, quæ etiam gravitas appellari ſolet, univerſæ materiæ æque communis eſſe creditur. Itaque corpus quodvis A trahit ad ſe corpus quodvis B, ac tanto maiorem in illud vim exercet, quanto maior eſt maſſa cum corporis A, tum corporis B; quippe quia unaquæque pars corporis A vim exercet ſuam, eamque exercet in unamquamque partem corporis B.

16. Erit ergo vis attractiva in proportione compoſita maſſarum. Sit maſſa corporis A $= M$; corporis B $= m$. Erit vis attractiva $= M m$, ſi maſſis quidem æſtimanda tantum ſit. Æſtimari autem ſolet non maſſis tantum, ſed etiam poteſtate quapiam diſtantiæ illius, quæ inter corpora ſe mutuo trahentia intercedit. Hinc multæ & variæ attractionis leges, ut cui-

que libet, fingi poſſunt. Vulgo tenet lex illa, ut tanto major cenſeatur eſſe vis attractiva, quanto minus eſt diſtantiæ quadratum. Quare ſi diſtantia, quæ intercedit inter corpora A, & B, ſit $= D$, erit jam vis attractiva $= \frac{Mm}{DD}$. Hanc legem ſequemur, ubicumque de maſſæ cujuſpiam attractione ſermo incidet.

17. Non eſt dubium, quin vis attractiva æque urgeat utrumque corpus A, & B; valet enim in utroque par ratio. Neque minus conſtat, vim attractivam in unoquoque momento temporis velocitatem quamdam minimam utrique corpori tribuere. Quod idem faciunt & aliæ vires, quotcumque corpori perpetuo inſtant. Velocitas hæc minima appelletur velocitas initialis.

18. Cum ambo corpora A, & B momentis ſingulis urgeantur, ut modo dixi, æquali vi; ſequitur, ut velocitates initiales reciproce proportionales ſint ipſorum maſſis (10.).

19. Et quoniam velocitas corporis habetur dividendo vim per maſſam (9.); vis autem, qua utrumque corpus urgetur eſt $\frac{Mm}{DD}$; velocitas initialis corporis A, cujus maſſa eſt M, erit $\frac{m}{DD}$; velocitas initialis corporis B, cujus maſſa eſt m, erit $\frac{M}{DD}$. Igitur utriuslibet corporis velocitas initialis eſt maſſa corporis alterius diviſa per quadratum diſtantiæ. Quo ſtatim patet, velocitatem utriuslibet corporis eamdem manere, quantacumque ejus ſit maſſa.

20. Mos tenet, ut corporis cujuſque maſſa perinde conſideretur, quaſi in unum punctum collecta eſſet; quod punctum tanto majorem vim attractivam habere exiſtimatur, quanto plus maſſæ in ipſo inſidere fingitur.

21. Fingi etiam ſolet, duorum corporum ſe mutuo trahentium alterum quidem ſic teneri, ut moveri ne poſſit; alterum vero ad ipſum, tamquam ad centrum, ferri. Has mathematicorum conſuetudines, pro eo ut res feret, ſequemur.

De gravitate conſtanti.

22. Cum vis attractiva, ſeu gravitas, quemadmodum ſupra dixi, non maſſæ tantum magnitudine, ſed etiam diſtantia æſtimari debeat, conſequens ſane eſt, ut gra-

Digitized by Google

gravitas corporis ad centrum, a quo trahitur, accedentis perpetuo variet, quippe quia perpetuo variat diſtantia. Juvat tamen ſimpliciſſimam hypotheſim in præſens perſequi, ac cognoſcere, quod ſpatium percurrat corpus cadendo, qua velocitate, quo tempore, ſi verſus centrum feratur gravitate conſtanti, quæ nempe eadem ubique ſit, & æqualem corpori velocitatem perpetuo tribuat. Quo loco quoniam a magnitudine maſſæ præſcinditur, idcirco putabimus, gravitatem velocitati ipſi initiali proportionalem eſſe; quam ſcilicet velocitatem certo conſtitutoque tempuſculo gravitas ipſa gignit in corpore. Hoc præmiſſo ad caſum corporis venio.

23. Linea recta AT tempus exprimat, quo corpus a quiete diſcedens verſus centrum deſcendit. Conſtituantur partes ejus infiniteſimæ & æquales A*m*, *mn*, *no*, &c. quæ exprimment tempuſcula certa infiniteſima, & æqualia. Primo tempuſculo A*m* accipiet corpus a gravitate velocitatem quamdam minimam. Hanc exprimat lineola *Au*. Rectangulum *mu* exprimet ſane ſpatium a corpore, tempuſculo *Am*, velocitate A*u*, percurrendum (3.). Sic fit primo tempuſculo; videamus, quid fiat reliquis; ſed prius diagonalem A*x* producamus, donec ſecet lineam TR, parallelam lineæ *mx*, in R. Secundo ſane tempuſculo *mn* accipiet corpus a gravitate velocitatem aliam æqualem primæ, primamque adhuc retinens, feretur velocitate dupla. Velocitatem hanc exprimet lineola *nz*, parallela lineæ *mx*, ſecanſque AR in *z*. Rectangulum *ny* exprimet ſpatium a corpore, tempuſculo *mn*, velocitate *nz* percurrendum. *Fig. 2.*

Quod ſi ad alia atque alia tempuſcula eodem modo proceſſeris, donec expleas triangulum totum ATR, linea AT exprimet tempus, quo corpus deſcendit; linea TR velocitatem, quam corpus obtinet in fine deſcenſus; ſumma vero rectangulorum *mu*, *ny*, *op*, &c. exprimet ſpatium, quod corpus deſcendendo confecit. Et quoniam ſumma rectangulorum *mu*, *ny*, *op*, &c. nihil differt a triangulo ipſo ATR, quippe quia prominentia acumina *u*, *y*, *p*, &c. ſi in unam ſummam conferantur, ac cum triangulo ATR comparentur, infiniteſimum quidpiam ſunt; idcirco ſpatium, quod corpus deſcendendo conficit, exprimetur triangulo ipſo ATR.

24. His poſitis facile intelligitur, velocitatem TR, quam corpus obtinet in fine deſcenſus, duplam eſſe ejus velocitatis,

qua deſcendendo ſpatium ATR conficit. Hac enim velocitate in tempore AT conficit ſpatium, quod exprimitur triangulo ATR, ut modo oſtendimus. Velocitate vero TR, quam obtinet in fine deſcenſus, conficeret in eodem tempore AT ſpatium, quod rectangulo ex AT, & TR exprimitur (3.), quod rectangulum trianguli ATR duplum eſt.

25. Neque minus patet, ſpatium, quod corpus deſcendendo percurrit, quodque exprimitur triangulo ATR, eſſe in ratione compoſita gravitatis, ſeu velocitatis initialis, quæ exprimitur lineola A*u*, ſive *mx*, & quadrati temporis, quod tempus exprimitur linea AT. Manifeſtum eſt enim triangulum ATR tanto eſſe majus, quanto major eſt *mx*, ſi ſit quidem AT conſtans; & ſimul tanto eſſe majus, quanto eſt majus lineæ AT quadratum, ſi ſit quidem conſtans *mx*.

26. Si ergo ſit ſpatium $= S$. Tempus $= T$. Gravitas, ſeu velocitas initialis $= G$. Erit $S = GTT$.

27. Quo ſtatim intelligitur, tempus deſcenſus eſſe radicem ſpatii diviſi per gravitatem. Si enim $S = GTT$, erit etiam $T = \sqrt{\frac{S}{G}}$.

28. Et quoniam velocitas deſcenſus exprimitur ſpatio diviſo per tempus, erit hæc $= \frac{S}{\sqrt{\frac{S}{G}}} = \sqrt{GS}$; nempe radix gravitatis ductæ in ſpatium.

29. Ac ſi hanc ipſam velocitatem, ideſt radicem gravitatis ductæ in ſpatium, duplicaveris, habebis velocitatem, quam corpus obtinet in fine deſcenſus (24.). Erit ergo velocitas in fine deſcenſus $= 2\sqrt{GS}$.

Non inutile erit has formulas memoria tenere. Quamquam qui primam illam $S = GTT$ in animo infixam habuerit, alias ſibi ipſe, ſi res poſtulet, nullo labore parare poterit.

CAP.

Digitized by Google

CAPUT I.

De Motu curvilineo generatim.

Lemma e geometria petitum.

30. A Puncto quovis R curvæ cujuſvis RP, ducta RT tangente, ducantur intra curvæ concavum lineæ quævis duæ RF, RM. Sumatur arcus RL infiniteſimus, ducaturque LQ perpendicularis ad RF, nec non Ly parallela tangenti RT, ſecans RF in x, RM in y. *Fig. 3.*

Dico primum, omnia latera trianguli Rxy eſſe infiniteſima ſecundi ordinis. Dico ſecundo, omnia latera trianguli LxQ eſſe infiniteſima primi ordinis.

Antequam hæc demonſtro, ducatur LT perpendicularis ad tangentem RT, nec non Ru perpendicularis ipſa quoque tangenti RT, ſecanſque Ly in u. Demum a puncto quovis F lineæ RF ducatur FM parallela & ipſa tangenti RT, occurrenſque lineæ Ru productæ in H, & lineæ RM in M.

Demonſtro primam partem. Cum ſit angulus LRT infiniteſimus, ut qui ſit a curva & tangente, erit lineola LT infiniteſima, ſi ad lineam TR, ſive LR, comparetur; quare cum RL ponatur infiniteſima primi ordinis, erit LT infiniteſima ordinis ſecundi, ergo etiam Ru, quæ eſt æqualis LT. Jam vero cum triangula RFH, Rxu ſint ſimilia, ac latera omnia trianguli RFH ſint aſſignabilia, oportebit latera omnia trianguli Rxu eſſe infiniteſima ejuſdem ordinis; erunt ergo omnia infiniteſima ordinis ſecundi. Eamdem rationem transferes ad latera omnia trianguli Rxy ex ſimilitudine triangulorum RFM, Rxy.

Demonſtro partem alteram. Cum ſit Lu infiniteſima primi ordinis, ut quæ æqualis eſt lineæ RT, ſi ei dematur pars xu, quæ, ut modo oſtendi, infiniteſima eſt ſecundi ordinis, erit adhuc reliqua Lx infiniteſima primi ordinis. Jam vero cum triangulum LxQ ſimile ſit triangulo Rxu, ideoque etiam triangulo RFH; ſint vero latera omnia trianguli RFH aſſignabilia, erunt latera omnia trianguli LxQ infiniteſima

teſima ejuſdem ordinis; ergo erunt omnia infiniteſima ordinis primi.

De motu curvilineo.

Fig. 4. 31. INcedens corpus per curvam lineam quamlibet RP ſit jam in puncto quovis R. Hic ſane, ut omnes docent, vim facit, ut per tangentem RT excurrat. Ut ergo a tangente deflectat, & curvam lineam ſequatur, neceſſe eſt, ut vi alia quapiam urgeatur verſus aliquod punctum F, quod intra curvæ concavum ſit poſitum; ſic quidem, ut vi ex duabus compoſita per laterculum RL curvæ ſe immittat.

32. Vis, qua corpus excurrere nititur per tangentem RT, dicitur vis projectionis, ſeu tangentialis. Vis, qua trahitur verſus F, vis centripeta. Quod ſi a puncto quovis L laterculi RL ducantur lineæ LT, L*u* parallelæ directionibus RF, RT, completo parallelogrammo T*u*, exprimet ſane linea RL velocitatem, qua corpus ex R in L fertur; linea RT exprimet velocitatem tangentialem; linea R*u* velocitatem initialem a vi centripeta ortam (14.).

33. Quare ſi ſint arcus duo quivis infiniteſimi RL, *rl* vel in eadem curva, vel in diverſis, qui æqualibus tempuſculis percurrantur, compleanturque parallelogramma T*u*, *t*V, uti ſupra; non eſt dubium, quin ſicuti lineæ RL, *rl* expriment velocitates, quibus ipſæ percurruntur (5.), ſic etiam lineæ RT, *rt* exprimant velocitates tangentiales, quas corpus habet in punctis R, & *r*; lineæ vero R*u*, *r*V velocitates initiales a vi centripeta ortas.

34. Si vis centripeta per univerſum curvæ tractum perpetuo dirigatur verſus idem punctum F, dicitur punctum F centrum virium. Fingi ſolet hoc centrum perpetuo trahere ad ſe corpus; hinc oriri vim centripetam. Quamquam vis centripeta ubique fere a nobis conſiderabitur, uti vis quæpiam urgens perpetuo corpus verſus centrum, undecumque tandem oriatur.

35. Quoniam vero quæ infra quærenda ſunt, a velocitatibus tantum pendent, quod erit legentibus manifeſtum; idcirco virium nomine, velocitates tantum ipſas intelligemus, eritque jam nobis vis centripeta nihil aliud, niſi velocitas ipſa initialis a vi centripeta orta.

Digitized by Google

36. Quod ſi duæ rectæ ducantur FR, FP abſcindentes in curva arcum quemvis RP, ſpatium RFP appellabitur area, quam corpus eo tempore dicetur deſcribere, quo tempore percurrit arcum RP. His definitionibus præmiſſis theoremata quatuor, quorum maximus uſus eſt, exſequamur.

37. *Th. I.* Volvatur corpus per curvam RP, ſitque F centrum virium. Sume arcum quemvis infiniteſimum RL, eum tamen, qui certo tempuſculo percurratur. Duc LQ perpendicularem ad FR, tum FT perpendicularem ad tangentem RT. Velocitas, qua corpus percurrit arcum RL, ponatur $= u$. Dico eſſe $LQ = \frac{FT \times u}{FR}$. *Fig. 5.*

Dem. Cum ſit angulus LRT infiniteſimus, haberi poſſunt pro æqualibus anguli LRQ, TRF. Quo ſtatim apparet, triangula etiam FRT, RLQ pro ſimilibus haberi poſſe, eſſeque $FR : FT :: RL : LQ$, ergo $LQ = \frac{FT \times RL}{FR}$. Atqui arcus RL (quoniam, ubivis ſumatur, certo ſemper tempuſculo percurritur) exprimit velocitatem u (5.); ergo $LQ = \frac{FT \times u}{FR}$.

38. *Th. II.* Volvatur corpus per curvam quamlibet AQ; ſitque F centrum virium. Dico, duas quaſvis areas AFP, AFQ proportionales eſſe temporibus, quibus deſcribuntur. *Fig. 7.*

Id manifeſtum per ſe erit, ſi prius oſtendatur, areolas deinceps duas infiniteſimas AFR, RFL, quæ æquales quidem ſint, æqualibus deſcribi tempuſculis. Id ergo oſtendamus.

Ducatur LT parallela lineæ RF, ſecans AR productam in T, compleaturque parallelogrammum Tu. Hic jam vides eſſe Ru vim centripetam, RT vim tangentialem, atque his duabus componi vim, qua corpus fertur per RL (32.)

Ducatur nunc FT. Quo facto apparet ſtatim, triangula RFT, RFL æqualia eſſe; habent enim camdem baſim RF, ſuntque inter eaſdem parallelas LT, RF. Quare cum triangulum RFT æquale ſit areæ RFL, atque area RFL poſita ſit æqualis areæ AFR; erunt triangula RFT, AFR æqualia, & baſes AR, RT æquales.

His poſitis ſic colligo. Vis tangentialis eſt illa ipſa vis, qua corpus fertur per AR, quaque nititur excurrere per RT. Quare cum ſit $RT = AR$, tempus, quo corpus vi tangentiali percurreret RT, æquale eſt tempori, quo revera percurrit

rit AR; atqui tempus, quo percurreret RT, æquale eſt etiam tempori, quo percurrit RL (13.); ergo AR, & RL percurruntur æquali tempore: ergo areolæ AFR, RFL æqualibus tempuſculis deſcribuntur. Quod oſtendendum ſuſceperam.

Nunc jam theorema propoſitum ſic expedio. Quanto plures areolas AFR continebit area AFQ quam area AFP, tanto etiam pluribus tempuſculis deſcribetur. Ergo erunt areæ AFQ, AFP proportionales temporibus, quibus deſcribuntur. Q. e. d.

39. Licet etiam theorema ſic convertere. Si areæ omnes, terminatæ in eodem puncto F, proportionales ſint temporibus, quibus deſcribuntur, vis centripeta erit ubique directa ad idem punctum F.

Sint enim areæ duæ infiniteſimæ AFR, RFL æquales; ideoque arcus AR, RL æqualibus tempuſculis percurrantur. Producatur AR in T, ut ſit RT = AR; ducaturque LT. Facile intelligis, lineam RT exprimere vim tangentialem, lineam RL exprimere vim, qua corpus ex R in L fertur, ideoque eſſe TL parallelam directioni, quam vis centripeta habet in R. Præterea triangula duo RFT, RFL ſunt æqualia (quippe utrumque, ut facile conſtat, æquale eſt triangulo AFR), & inſiſtunt eadem baſi RF; oportet ergo lineam TL, vertices jungentem, parallelam eſſe etiam lineæ RF. Cum ergo TL ſit parallela tum lineæ RF, tum directioni vis centripetæ in R, coincidet hæc cum RF, tenditque ad punctum F.

Fig. 5. 6. 40. *Th. III.* Volvantur duo corpora per duas quaſvis curvas RP, *rp*; ac ſint centra virium F, *f*. Sint arcus duo quivis infiniteſimi RL, *rl*, qui æquali tempore percurrantur, compleanturque areæ RFL, *rfl*; ac tandem ducantur FT, *ft* perpendiculares tangentibus RT, *rt*. Dico, velocitatem corporis in R eſſe ad velocitatem corporis in *r*, uti eſt area RFL diviſa per FT ad aream *rfl* diviſam per *ft*.

Antequam id demonſtro, placet hoc animadvertere. Propter infinitam parvitatem angulorum LRT, *lrt* haberi poſſunt triangula RFL, *rfl* tamquam inſiſtentia tangentibus ipſis RT, *rt*; ideoque etiam lineæ FT, *ft* haberi poterunt tamquam ipſorum altitudines. Hoc præmiſſo ſic rem demonſtro.

Quoniam RL, & *rl* percurruntur æquali tempore, erit velo-

velocitas in R ad velocitatem in r, uti RL ad rl (5.) Atqui eſt $RL = \frac{RFL}{FT}$, & $rl = \frac{rfl}{ft}$ (eſt enim baſis cujuſvis trianguli æqualis triangulo ipſi diviſo per altitudinem). Ergo velocitas in R ad velocitatem in r, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$. Q. e. d.

41. Neque id minus tenet, ſi puncta R, & r, ideoque etiam arcus RL, rl, æquali tempuſculo confecti, in eadem curva ſumantur. Valet enim in eadem curva ratio eadem. Et quoniam in eadem curva area RFL eſt conſtans, quippe quia arcum RL eum ſemper ſumi volumus, qui æquali tempuſculo conficiatur (38.), poni poterit $RFL = 1$, eritque velocitas in quovis puncto $R = \frac{1}{FT}$.

42. *Th. IV.* Volvantur duo corpora per duas quaſlibet curvas PV, pu, ſintque centra virium F, f. Sumantur duo quivis arcus PV, pu, compleanturque areæ PFV, pfu. Sumantur præterea arcus RL, rl, qui æquali tempore T percurrantur, compleanturque etiam areæ RFL, rfl. Dico, tempus, quo percurritur arcus PV, eſſe ad tempus, quo percurritur arcus pu, uti eſt area PFV diviſa per aream RFL ad aream pfu diviſam per aream rfl. *Fig.* 8. 9.

Dem. In curva PV eſt utique area RFL ad aream PFV, uti tempus T ad tempus, quo percurritur arcus PV (38): ergo tempus, quo percurritur arcus PV, erit $= \frac{PFV \times T}{RFL}$. Similiter in curva pu invenies tempus, quo percurritur arcus pu, eſſe $= \frac{pfu \times T}{rfl}$. Eſt ergo illud tempus ad hoc, uti $\frac{PFV \times T}{RFL}$ ad $\frac{pfu \times T}{rfl}$, nempe uti $\frac{PFV}{RFL}$ ad $\frac{pfu}{rfl}$. Q. e. d.

43. Antequam huic capiti finem pono, placet ea breviter recenſere, quæ curvam determinant a corpore percurrendam. Sit corpus in R, ac centrum virium ſit F. Determinata vi centripeta, ejuſque directione verſus F, ſi determinata etiam ſit vis projectionis, ejuſque directio RT, cogetur ſane corpus diſcedere a puncto R, determinatamque directionem RL ingredi, quam, niſi quid aliud ſuperveniat, perpetuo ſequatur. Verum ſupervenit ſtatim attractio nova centri F, quæ ipſum cogit directionem acceptam mutare, atque aliam LQ ingredi. Hujus autem novæ attractionis cum vis tum directio determinantur ex ipſo ſitu, & diſtantia centri F, atque ex ipſa attractionis lege; quæ determinata ſi fuerint, determina- *Fig.* 10

 mina-

minata erit etiam in corpore directionis mutatio. Hoc modo progredietur corpus perpetuas habens determinataſque directionis mutationes, atque idcirco determinatam curvam percurret.

44. Quæ ergo curvam percurrendam determinant, hæc ſunt. Vis centripeta, & vis projectionis, earumque directiones; deinde centri diſtantia, & attractionis lex. Quæ ſi eadem maneant omnia, eadem quoque curva a corpore percurrenda erit. Quamquam ſi horum unum mutetur, modo & aliorum conveniens mutatio fiat, eamdem adhuc curvam percurrere corpus poterit. Nihil enim impedit, quominus datam curvam quamlibet poſſit corpus percurrere, quantacumque ſit vis centripeta, qua trahitur e puncto R verſus F. Cur enim dum trahitur verſus F, quantacumque trahatur vi, nequeat etiam ſic projici, ut vi compoſita datæ curvæ laterculum ineat? Ubi id peregerit, cur ſuperveniens ſtatim attractio nova centri F non ea eſſe poſſit, ut corpus in aliud, quod proxime ſequatur, datæ curvæ laterculum ſe immittat; ac ſic deinceps ad latercula alia, atque alia ex certa attractionis lege tranſeat, omneſque accipiat datæ curvæ directiones? Sed jam de his ſatis..

CAP. II.

De revolutione corporis per circulum vi centripeta ad circuli centrum tendente.

Vires centrales in ſectionibus conicis explicare ingrediens, exordiar a circulo, quippe qui ſectionum conicarum ſimpliciſſimus eſſe creditur.

Fig. 11 45. Volvatur corpus per circulum AB vi centripeta tendente ad circuli centrum C. Dico, velocitatem, qua per circulum volvitur, eſſe conſtantem.

Dem. Percurrat corpus duos quoſvis arcus AD, AE, compleanturque areæ ACD, ACE. His poſitis ſic colligo. Arcus AD, AE ſunt uti areæ ACD, ACE; atqui hæ areæ ſunt uti tempora, quibus arcus AD, AE percurruntur (38); ergo arcus AD, AE ſunt uti tempora, quibus percurrun-

tur;

tur; ergo velocitas in utroque arcu eadem (6.); ergo conſtans.

Idem aliter. Velocitas in quovis curvæ puncto eſt $\frac{1}{FT}$ (41.), ideſt unitas diviſa per eam perpendicularem, quæ a centro ad puncti tangentem ducitur; quæ perpendicularis in circulo radius eſt. Atqui unitas diviſa per radium conſtans eſt: ergo & velocitas.

46. Volvatur corpus per circulum RH vi centripeta tendente ad circuli centrum F. Dico, vim centripetam exprimi tertia proportionali poſt diametrum, & velocitatem, qua corpus per circulum volvitur. *Fig. 12.*

Dem. Sit arcus infiniteſimus RL, quem corpus percurrat certo tempuſculo, ducaturque Lu parallela tangenti RT, ſecans diametrum RH in u; exprimet ſane arcus RL velocitatem, qua corpus per circulum volvitur; lineola Ru vim centripetam (32.). Atqui eſt Ru tertia proportionalis poſt diametrum RH, & arcum RL. Ergo vis centripeta exprimitur tertia proportionali poſt diametrum, & velocitatem, qua corpus per circulum volvitur.

47. Erit ergo vis centripeta quadratum velocitatis, qua corpus per circulum volvitur, diviſum per diametrum. Sit vis centripeta $= G$. Velocitas, qua corpus per circulum volvitur, $= V$; diameter $= D$; erit $G = \frac{VV}{D}$.

48. Hinc patet, vim centripetam G in tota corporis revolutione conſtantem eſſe; eſt enim conſtans velocitas V (45), neque minus conſtans eſt diameter D.

49. Patet etiam, velocitatem, qua corpus per circulum volvitur, eſſe radicem vis centripetæ ductæ in diametrum. Si eſt enim, ut modo diximus, $G = \frac{VV}{D}$, erit etiam $V = \sqrt{DG}$.

50. Porro tempus periodicum erit radix diametri diviſæ per vim centripetam. Nam tempus periodicum eſt utique circumferentia ipſa, cui ſubſtituere diametrum D poſſumus, diviſa per velocitatem (4.). Eſt ergo tempus periodicum $= \frac{D}{\sqrt{DG}} = \sqrt{\frac{D}{G}}$.

51. *Problema*. Volvatur corpus per circulum AB vi centripeta tendente ad circuli centrum C. Fingatur jam cadere ver- *Fig. 13.*

ſus C e quovis circumferentiæ puncto A, ea vi centripeta, quam habet in circulo, ipſum conſtanter urgente. Invenire punctum D, ad quod cum cadendo pervenerit, obtineat velocitatem æqualem illi, qua per circulum volvitur.

Sit diameter $= D$. Velocitas, qua corpus per circulum volvitur, $= V$. Erit vis centripeta $= \frac{VV}{D}$ (47.). Sit jam $AD = x$. Quoniam velocitas, quam corpus, cadendo ex A, obtinet in D, æqualis eſt duabus radicibus ſpatii ipſius AD ducti in vim centripetam (29.), erit velocitas in $D = 2\sqrt{\frac{VV \times x}{D}}$. Pone ergo æquationem $2\sqrt{\frac{VV \times x}{D}} = V$. Exſiſtet hinc x (AD) $= \frac{D}{4}$. Quæ quarta pars diametri eſt. Q. e. i.

52. Iiſdem poſitis. Tempus periodicum eſt ad tempus, quo corpus cadit ex A in D, uti circumferentia ad radium.

Dem. Sit circumferentia $= C$. Erit tempus periodicum $= \frac{C}{V}$ (4.). Tempus, quo corpus cadit ex A in D, eſt (27.) radix ſpatii ipſius AD diviſi per vim centripetam. Eſt autem, ut modo oſtendimus, ſpatium $AD = \frac{D}{4}$; vis centripeta $= \frac{VV}{D}$. Erit ergo tempus, quo corpus cadit ex A in D, $= \frac{D}{2V}$. Hic ſtatim vides, eſſe $\frac{C}{V} : \frac{D}{2V} :: C : \frac{D}{2}$, nempe tempus periodicum eſſe ad tempus, quo corpus cadit ex A in D, uti eſt circumferentia ad radium. Q. e. d.

Fig. 14. 15. 53. Volvantur duo corpora per duos circulos AB, ab viribus centripetis tendentibus ad centra C, c. Si vires centripetæ reciproce proportionales ſint quadratis diſtantiarum CA, ca, ſive diametrorum AB, ab, dico quadrata temporum periodicorum eſſe proportionalia cubis diametrorum.

Demonſtratio ſine ullo artificio vel minus attentis ſe prodit. Sit in circulo AB diameter $AB = D$. Vis centripeta $= G$. Erit tempus periodicum $= \sqrt{\frac{D}{G}}$ (50.), cujus quadratum $= \frac{D}{G}$. Sit in circulo ab diameter $ab = d$. Quoniam volumus vires centripetas eſſe reciproce proportionales quadratis diametrorum, erit in circulo ab vis centripeta $= \frac{DD \times G}{dd}$. Tempus periodicum $= \sqrt{\frac{d^3}{DD \times G}}$ (50.), cujus quadratum $= \frac{d^3}{DD \times G}$. Statim vides

vides eſſe $\frac{D}{G} : \frac{d^3}{DD \times G} :: D^3 : d^3$, ideſt quadrata temporum periodicorum proportionalia eſſe cubis diametrorum. Q. e. d.

54 Volvantur duo corpora per duos circulos AB, *ab* viribus centripetis tendentibus ad centra C, *c*. Si quadrata temporum periodicorum fuerint proportionalia cubis diametrorum, dico, vires centripetas eſſe reciproce proportionales quadratis diſtantiarum CA, *ca*, ſive diametrorum AB, *ab*.

Hic quoque inutile ſit artificia quærere. Sit in circulo AB diameter $AB = D$. Tempus periodicum $= T$. Quoniam velocitas, qua corpus per circulum volvitur, æqualis eſt circumferentiæ, ſeu diametro, diviſæ per tempus (2.), erit in circulo AB velocitas $= \frac{D}{T}$. Et quia vis centripeta æqualis eſt quadrato velocitatis diviſo per diametrum (47.) erit in circulo AB vis centripeta $= \frac{D}{TT}$. Jam vero in circulo *ab* ſit diameter $ab = d$. Quoniam volumus, quadrata temporum periodicorum proportionalia eſſe diametrorum cubis, erit in circulo *ab* tempus periodicum $= \sqrt{\frac{d^3 \times TT}{D^3}}$. Eamdem porro viam inſiſtens, quam modo in circulo AB tenuimus, invenies in circulo *ab* vim centripetam $= \frac{D^3}{dd \times TT}$. Ac jam vides eſſe $\frac{D}{TT} : \frac{D^3}{dd \times TT} :: dd : DD$, ideſt vires centripetas reciproce proportionales eſſe quadratis diametrorum. Q. e. d.

55. Volvatur corpus per circulum AB ex attractione maſſæ M in centro ipſo C inſidentis. Dico, maſſam M proportionalem eſſe cubo diametri, ſive radii, diviſo, per quadratum temporis periodici. Sit diameter $= D$. Tempus $= T$. Dico eſſe $M = \frac{D^3}{TT}$. *Fig. 14.*

Dem. Velocitas initialis, quam parit attractio, eſt maſſa M diviſa per quadratum diſtantiæ (19.), cui diſtantiæ ſubſtituere poſſumus diametrum ipſam D; eſt ergo velocitas initialis $= \frac{M}{DD}$. Eſt etiam velocitas initialis $= \frac{VV}{D}$ (47.); quare cum velocitas V æqualis ſit circumferentiæ, cui diametrum D poſſumus ſubſtituere, diviſæ per tempus periodicum T, ideoque ſit $V = \frac{D}{T}$, & $VV = \frac{DD}{TT}$; erit jam velocitas initialis

lis $\frac{vv}{v} = \frac{D}{TT}$. Pone ergo æquationem $\frac{M}{DD} = \frac{D}{TT}$. Exſiſtet $M = \frac{D^3}{TT}$. Q. e. d.

Fig. 13. 56. *Problema*. Dato tempore periodico, quo corpus volvitur per datum circulum AB vi centripeta tendente ad centrum C, invenire proportionem, quam habet vis ejus centripeta ad communem terreſtrium corporum gravitatem.

Ut eſt circumferentia ad radium, ita ſit tempus periodicum datum ad tempus aliud K. Experimentales phyſici te docebunt, quam lineam percurrat terreſtre corpus a quiete diſcedens, ac cadens libere tempore conſtituto K. Sit ea linea PQ. Sit præterea AD quarta pars diametri AB. Dico, vim centripetam corporis per circulum AB ſe volventis eſſe ad communem terreſtrium corporum gravitatem, uti AD ad PQ.

Dem. Quoniam ponitur circumferentia ad radium, uti tempus periodicum ad tempus K, ſequitur, ut, ſi corpus cadat libere ex A, vi centripeta, quam habet in A, ipſum conſtanter urgente, conficiat lineam AD tempore K (52). Jam vero eodem tempore K terreſtre corpus cadens libere conficit lineam PQ; gravitates vero ſunt uti ſpatia eodem tempore percurſa (25); ergo vis centripeta corporis ſe volventis per circulum AB eſt ad communem terreſtrium corporum gravitatem, uti AD ad PQ.

Hæc habui dicere de revolutione corporis per circulum; in quibus exerceri te paululum volo, Torquate ſuaviſſime, ſic ut eadem demonſtres aliter, multiſque modis verſes, & alia addas, ut in mentem venient. Sic enim & quæ adhuc te docui, breviora ipſe facies, atque elegantiora, & ad ea, quæ infra tradentur, paratior accedes.

CA-

CAPUT III.

De revolutione corporis per ellipſim vi centripeta ad focum tendente.

Lemmata quædam e geometria petita.

CIrculum ellipſis excipiat, quæ illi eſt ſectionum conicarum omnium quamproxima; qua in curva centrales vires difficiliores paulo eſſe exiſtimantur, atque obſcuriores. Ego illas breviter explanare nitar, & dilucide quantum potero.

Sed antequam revolutionem corporis explico, volo te, Varene ſuaviſſime, pauca quædam, quæ quaſi lemmata infra aſſumam, e geometria nunc repetere, ne poſtea rem mechanicam tractanti in geometrica hærendum ſit. Quæ autem demonſtrata ab aliis ſunt, ea tantum indicabo; quod nuſquam alibi demonſtratum eſſe arbitror, id ipſe curabo, ut demonſtrem.

57. Sit ellipſis AB, cujus axis major AB, minor DE, *Fig.* 16. centrum C, focus F. Parameter axis majoris ſit P. Hanc parametrum appellabo poſthac parametrum ellipſeos.

58. His poſitis, dico primum, lineam FD æqualem eſſe ſemiaxi CA. Imo ſi ſumto in ellipſi puncto quovis R, ducatur per C diameter RV, tum diameter conjugata MN, ac tandem linea FR ſecans MN in G, erit etiam $GR = CA$.

59. Dico ſecundo, rectangulum ex CA & CD æquale eſſe parallelogrammo ex CR & CN, ſive CM; ideoque ducta RO perpendiculari ad MN, eſſe $CM:CA::CD:RO$.

60. Quod ſi ponatur arcus RL infiniteſimus, iiſdemque poſitis, quæ ſupra poſuimus, ducatur Lu parallela tangenti RT, ſecans lineam FR in u; tum linea LQ perpendicularis ad FR; dico eſſe $P:LQ::LQ:Ru$, ideoque $Ru = \frac{LQ^2}{P}$.

Id facile oſtendes, ſi producta Lu, donec ſecet diametrum RV in x, & perpendicularem RO in z, animadverteris, triangula duo Ruz, LuQ ſimilia eſſe, eſſeque $Ru:Rz::$

$Lu:$

$Lu : LQ$. Inventis enim Rz, & Lu, facile etiam intelliges quo modo ſe habeat LQ ad Ru.

Quæramus igitur primum Rz. Cum ſit axis major $= 2CA$, parameter vero P, erit axis minor $= \sqrt{P \times 2CA}$, & $CD = \sqrt{\frac{P \times CA}{2}}$. Eſt autem $CM : CA :: CD : RO$ (59). Erit igitur $RO = \frac{CA\sqrt{\frac{P \times CA}{2}}}{CM}$. Atqui propter ſimilitudinem triangulorum RGO, Ruz, eſt RG, ſive CA (58.) $: RO :: Ru : Rz$. Ergo $Rz = \frac{Ru\sqrt{\frac{P \times CA}{2}}}{CM}$.

Quæramus jam Lu. Primum propter ſimilitudinem triangulorum ROC, Rzx, eſt $RO : RC :: Rz : Rx$. Hic pro RO, & Rz ſubſtitue valores ſupra inventos, ac ſtatim habebis $Rx = \frac{RC \times Ru}{CA}$. Deinde cum poſſit Lu confundi cum Lx ordinata ad diametrum RV, eſt enim ux differentia infiniteſima ſecundi ordinis (30.) erit ex ellipſeos natura $\overline{CR}^2$ ad $\overline{CM}^2$, uti $Vx \times Rx$, ſive $2CR \times Rx$, ad $\overline{Lu}^2$. Jam vero ſi pro Rx ſubſtitues valorem ejus modo inventum, erit tibi ſtatim $Lu = CM\sqrt{\frac{2Ru}{CA}}$.

Lineis Rz, Lu ſic inventis, cum ſit, ut initio dixi, $Ru : Rz :: Lu : LQ$, invenies ſtatim $LQ = \sqrt{P \times Ru}$, unde $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Q. e. d.

De revolutione corporis per ellipſim.

Fig. 17. 61. Volvatur corpus per ellipſim AB vi centripeta tendente ad focum F, ſitque parameter ellipſeos $= P$. Sume arcum quemvis infiniteſimum RL, quem corpus certo, conſtitutoque tempuſculo percurrat, deinde duc LQ perpendicularem ad FR, & FT perpendicularem tangenti RT.

Dico, vim centripetam, quam corpus habet in R, ex-

primi

Digitized by Google

primi per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$; ac ſi velocitas, quam corpus habet in R, ſit $= u$, exprimi vim centripetam etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$.

Demonſtro primam partem. Ducatur Lu parallela tangenti RT, ſecans FR in u. Exprimet ſane Ru vim centripetam, quam habet corpus in R (32.). Atqui eſt $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (60.). Ergo $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$ vim centripetam exprimit. Q. e. d.

Demonſtro partem alteram. Vis centripeta in R exprimitur, ut modo oſtendi, per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Atqui eſt $LQ = \frac{FT \times u}{FR}$ (37.), ideoque $LQ^2 = \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{\overline{FR}^2}$. Ergo vis centripeta in R exprimitur etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$. Q. e. d.

62. His viſis dico vim centripetam in quovis puncto R ejuſdem ellipſeos eſſe reciproce proportionalem quadrato diſtantiæ a foco F, nempe eſſe $\doteq \frac{1}{\overline{FR}^2}$.

Dem. Quoniam volumus, arcum RL, ubicumque ſit, eum ſemper eſſe, qui æquali tempore percurratur, erit area RFL perpetuo æqualis (38.). Sit ergo area RFL $= 1$. Atqui eſt LQ proportionalis areæ RFL diviſæ per FR (eſt enim altitudo cujuſvis trianguli proportionalis triangulo ipſi diviſo per baſim); ergo $LQ = \frac{1}{FR}$, & $\overline{LQ}^2 = \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Eſt autem vis centripeta $= \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (61.). Erit igitur vis centripeta $= \frac{1}{P \times \overline{FR}^2}$. Et quoniam in eadem ellipſi eſt P conſtans, ideoque e formula expungi poteſt, erit tandem vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Q. e. d.

Idem aliter. Eſt vis centripeta $= \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$ (61.); atqui eſt $u = \frac{1}{FT}$ (41.), ideoque $uu = \frac{1}{\overline{FT}^2}$. Ergo vis centripeta $= \frac{1}{P \times \overline{FR}^2}$. Expunge conſtantem P. Erit vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Q. e. d.

63. His rebus patet & vim centripetam, & velocitatem in ellipſi perpetuo variare; eſt enim vis centripeta $= \frac{1}{FR^2}$ (62.); velocitas $= \frac{1}{FT}$ (41.); quæ quantitates perpetuo variant.

64. Si corpus exſiſtat in vertice A, FT vertitur in FA; ſi in vertice B, in FB. Velocitas ergo in A $= \frac{1}{FA}$; in B, $= \frac{1}{FB}$. Sunt ergo velocitates in verticibus A, & B reciproce proportionales diſtantiis a foco F. Hæc atque alia permulta horum ſimilia, ſi te paululum exercere volueris, ut velis autem etiam atque etiam hortor, per te ipſe facile invenies.

65. Nunc revolutiones corporum per duas ellipſes diverſas conſideremus. Quo loco illud ante moneo, vires centripetas mihi dici promiſcue ſumtas, ſi aliæ in una curva ſumtæ ſint, aliæ in altera.

Fig. 18. 19. 66. Volvantur jam ergo duo corpora per duas ellipſes AB, *ab* viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*. Vireſque centripetæ, promiſcue ſumtæ, in punctis duobus R, *r* ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, *f*, ideſt ſit vis centripeta in R ad vim centripetam in *r*, uti $\frac{1}{FR^2}$ ad $\frac{1}{fr^2}$; dico tales eſſe vires centripetas promiſcue ſumtas etiam in punctis aliis quibuslibet, R, *h*, ideſt vim centripetam in R eſſe ad vim centripetam in *h*, uti $\frac{1}{FR^2}$ ad $\frac{1}{fh^2}$.

Dem. Eſt, ut ſupponimus, vis centripeta in R ad vim centripetam in *r*, uti $\frac{1}{FR^2}$ ad $\frac{1}{fr^2}$; ſed eſt utique vis centripeta in *r* ad vim centripetam in *h*, uti $\frac{1}{fr^2}$ ad $\frac{1}{fh^2}$ (62.); ergo vis centripeta in R ad vim centripetam in *h*, uti $\frac{1}{FR^2}$ ad $\frac{1}{fh^2}$. Q. e. d.

Fig. 20. 21. 67. Volvantur duo corpora per duas ellipſes AB, *ab* viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*. Sint parametri P, *p*. Vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, *f*. His poſitis, ſumantur duo quævis puncta R, & *r*, ducanturque FT, *ft* perpendiculares tangentibus RT, *rt*. Dico, velocitatem in R eſſe ad velocitatem in *r*, uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$:

Dem.

Dem. Sit velocitas in $R = V$; in $r, = u$. Erit vis centripeta in $R = \frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2}$; in $r = \frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2}$ (61). Et quoniam ſupponimus, vires centripetas, promiſcue ſumtas, eſſe reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis, habebimus etiam vim centripetam in $R = \frac{1}{\overline{FR}^2}$; in $r = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. Pone ergo æquationes duas; $\frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2} = \frac{1}{\overline{FR}^2}$, & $\frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2} = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. E prima æquatione elicies $V = \frac{\sqrt{P}}{FT}$; ex altera elicies $u = \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Eſt ergo V (velocitas in R) ad u (velocitatem in r), uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$. Q. e. d.

68. Erit ergo, in hujuſmodi ellipſibus, $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ generalis formula, velocitatem exprimens in quovis puncto R.

69. Volvantur duo corpora per duas ellipſes AB, *ab* viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*. Sint parametri P, *p*. Vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, *f*. His poſitis ſumantur arcus duo infiniteſimi RL, *rl*, qui æquali tempore percurrantur, compleanturque areæ RFL, *rfl*. Dico, areas RFL, *rfl* eſſe proportionales radicibus parametrorum.

Dem. Ductis FT, *ft* perpendicularibus ad tangentes RT, *rt*, erit velocitas in R ad velocitatem in *r*, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$ (40.), nec non etiam uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$ (67.). Erit ergo $\frac{RFL}{FT} : \frac{rfl}{ft} :: \frac{\sqrt{P}}{FT} : \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Ergo etiam $RFL : rfl :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$. Q. e. d.

70. Neque id minus valebit, ſi fuerint arcus RL, *rl*, ideoque etiam areæ RFL, *rfl* aſſignabiles. Poterunt quippe tempora reſolvi in tempuſcula totidem inter ſe æqualia, tum areæ in areolas tempuſculis ſingulis reſpondentes; ac ſi ſingulas areolas cum ſingulis comparaveris, valebit in omnibus ratio eadem.

71. Volvantur duo corpora per duas ellipſes AB, *ab* viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*, ſintque vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis. Dico, tempora, quibus duæ quævis

vis areæ P F V, *p f u* deſcribuntur, proportionalia eſſe areis ipſis diviſis per radices parametrorum.

Dem. Sint arcus R L, *r l* percurſi æquali tempore, compleanturque areæ R F L, *r f l*. Hoc poſito ſic colligo. Tempora, quibus deſcribuntur areæ P F V, *p f u*, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per areas R F L, *r f l* (42.). Sed areæ R F L, *r f l* ſunt uti radices parametrorum (69.). Ergo tempora, quibus deſcribuntur areæ P F V, *p f u*, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per radices parametrorum. Q. e. d.

Coroll. Ergo tempora periodica proportionalia ſunt totis areis diviſis per parametrorum radices.

Fig. 22. 72. Volvatur corpus per ellipſim A B vi centripeta tendente ad focum F. Sitque axis major A B, minor D E, centrum C, parameter P. Præterea, centro F, radio F D, fiat circulus D S; fingamuſque, corpus volvi per D S vi centripeta tendente ad centrum F, atque hanc vim centripetam æqualem eſſe illi, quam corpus, per ellipſim ſe volvens, habet in ipſo puncto D. Quo loco licet obiter animadvertere, eamdem maſſam eſſe oportere, quæ ſedens in F attractione ſua continet corpus tum in ellipſi A B, tum in circulo D S; ſi enim duæ diverſæ maſſæ eſſent, non eamdem vim centripetam parerent in eodem puncto D. Sed jam ad rem venio.

Dico primum, velocitatem, qua corpus volvitur per circulum D S, æqualem eſſe illi, quam, ſe volvens per ellipſim, habet in puncto D.

Dico ſecundo, tempus periodicum in circulo D S æquale eſſe tempori periodico in ellipſi A B.

Antequam hæc demonſtro, juvat animadvertere, ellipſim A B, & circulum D S revera duas ellipſes eſſe, in quibus vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, reciproce proportionales ſunt quadratis diſtantiarum; nam utique vires centripetæ tales ſunt in puncto communi D, quo fit, ut tales quoque eſſe debeant in punctis aliis quibuslibet (66.)

Demonſtro primam partem. Velocitas generatim eſt $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ (68.), ideſt radix parametri diviſa per eam perpendicularem, quæ a centro virium ad puncti tangentem ducitur. Videamus jam ergo quid ea ſit, tum in puncto D ellipſeos A B, tum in circulo D S. In ellipſi A B perpendicularis ducta a centro virium F ad tangentem puncti D eſt æqualis ſemiaxi C D,

ideſt

ideſt $= \frac{\sqrt{P \times AB}}{2}$. Ergo velocitas in puncto ellipſeos D $= \frac{2\sqrt{P}}{\sqrt{P \times AB}} = \frac{2}{\sqrt{AB}}$. In circulo DS, cum ſit parameter æqualis diametro, ideſt $= 2FD = AB$ (58.); perpendicularis vero ducta a centro F ad tangentem puncti D æqualis ſit radio ipſi $FD = \frac{AB}{2}$, ſequitur, ut velocitas in puncto circuli D, vel omnino in circulo DS, ſit $= \frac{2\sqrt{AB}}{AB} = \frac{2}{\sqrt{AB}}$. Quo ſtatim apparet, velocitates, quas dixi, æquales eſſe.

Demonſtro partem alteram. Tempus periodicum generatim eſt area totalis diviſa per radicem parametri (71.). Cum ergo ellipſeos area exprimatur rectangulo axium AB, DE, ſitque $DE = \sqrt{P \times AB}$, erit in ellipſi tempus periodicum $= \frac{AB\sqrt{P \times AB}}{\sqrt{P}} = \sqrt{AB^3}$. Cum vero circuli DS area exprimatur quadrato diametri $2FD = AB$, ſitque parameter æqualis diametro ipſi AB, erit in circulo tempus periodicum $= \frac{AB^2}{\sqrt{AB}} = \sqrt{AB^3}$. Conſtat ergo, tempora periodica, quæ dixi, æqualia eſſe.

73. Volvantur duo corpora per duas ellipſes AB, *ab*, viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*. *Fig.* 22, 23.

Dico primum. Si vires centripetæ, in ambabus ellipſibus promiſcue ſumtæ, ſunt reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis, quadrata temporum periodicorum erunt proportionalia cubis axium AB, *ab*.

Dico ſecundo. Si quadrata temporum periodicorum ſunt proportionalia cubis axium AB, *ab*, vires centripetæ, in ambabus ellipſibus promiſcue ſumtæ, erunt reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis.

Ut hæc demonſtrem, ſint circuli duo DS, *ds*, per quos volvi fingamus duo corpora ita plane, uti antea ſuppoſuimus (72.). Hoc poſito.

Demonſtro primam partem. Cum vires centripetæ, in ellipſibus AB, *ab* promiſcue ſumtæ, ponantur reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a punctis F, *f*, facile intelligitur, eas tales eſſe etiam in circulis DS, *ds*. Quod cum ita ſit, jam in circulis DS, *ds* quadrata temporum periodicorum ſunt pro-

por-

Digitized by Google

portionalia cubis diametrorum (53.): atqui tempora periodica in circulis DS, *ds* æqualia ſunt temporibus periodicis in ellipſibus AB, *ab* (72.), & diametri circulorum DS, *ds* æquales ſunt ellipſium axibus AB, *ab*; ergo etiam in ellipſibus AB, *ab* quadrata temporum periodicorum ſunt proportionalia cubis axium AB, *ab*. Q. e. d.

Id ipſum vel ſupra intelligi potuit (72.), ubi tempus periodicum expreſſimus per $\sqrt{\overline{AB}^3}$. Ea quippe re intelligi ſatis potuit, quadratum ejus exprimi per $\overline{AB}^3$, ideſt per cubum axis.

Demonſtro partem alteram. Quoniam in ellipſibus AB, *ab* quadrata temporum periodicorum ponuntur proportionalia cubis axium AB, *ab*, erunt etiam in circulis DS, *ds* quadrata temporum periodicorum proportionalia cubis diametrorum. Erunt ergo in circulis DS, *ds* vires centripetæ reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a centris F, *f* (54.). Quo facile intelligitur, tales eſſe debere vires centripetas promiſcue ſumtas etiam in ellipſibus AB, *ab*, quibuſcumque in punctis ſumantur. Sunt enim profecto tales in punctis D, *d* (66.).

74. Volvantur duo corpora per duas ellipſes AB, *ab*, viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*. Dico, centrales maſſas inſidentes in focis F, *f*, quarum attractione continentur corpora in ellipſibus AB, *ab*, eſſe proportionales cubis axium AB, *ab* diviſis per quadrata temporum periodicorum.

Ut id demonſtrem, ſint duo circuli DS, *ds*, per quos volvi fingamus duo corpora ita plane, uti ſuppoſuimus ſupra (72). Hoc poſito ſic colligo. Sunt utique in circulis DS, *ds* maſſæ centrales, quæ inſident in punctis F, *f*, proportionales cubis diametrorum diviſis per quadrata temporum periodicorum (55.). Atqui diametri circulorum DS, *ds* æquales ſunt axibus AB, *ab*; & tempora periodica in circulis DS, *ds* æqualia ſunt temporibus periodicis in ellipſibus AB, *ab* (72); eædemque ſunt centrales maſſæ, quæ continent corpora tum in ellipſibus, tum in circulis (72). Ergo maſſæ centrales inſidentes in focis F, *f* proportionales ſunt cubis axium AB, *ab*, diviſis per quadrata temporum periodicorum. Q. e. d.

75.

75. Quare ſi in ellipſibus AB, *ab* quadrata temporum periodicorum proportionalia ſunt cubis axium, oportebit ſane, maſſas centrales æquales eſſe. Nam utique cubi axium diviſi per quadrata temporum periodicorum in utraque ellipſi æquales erunt.

76. Problemate uno tractatiunculam hanc totam concludamus. Volvatur corpus per ellipſim AB vi centripeta tendente ad focum F. Fingatur jam cadere e quovis ellipſeos puncto R verſus F, vi centripeta, quam habet in R, ipſum conſtanter urgente. Invenire punctum D, ad quod cum corpus cadendo pervenerit, obtineat velocitatem æqualem illi, quam, ſe volvens per ellipſim, habet in puncto R. *Fig.* 24.

Ducatur FT perpendicularis ad tangentem RT, ſitque parameter ellipſeos P. His poſitis, ſit velocitas corporis in R $= u$. Erit vis centripeta in eodem puncto R $= \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$ (61). Sit RD $= x$. Velocitas, quam corpus cadens obtinet in D, eſt æqualis duabus radicibus ſpatii ipſius RD ducti in vim centripetam (29.). Ergo erit velocitas in D $=$

$2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}}$. Pone igitur æquationem $2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}} = u$.

Prodibit hinc x (RD) $= \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$: Nempe quarta proportionalis poſt $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri: Q. e. i.

Et quoniam quarta proportionalis poſt $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri ubique eſt minor, quam RF, idcirco corpus cadens a puncto R propoſitam velocitatem acquirit prius quam ad focum perveniat.

77. Quod ſi punctum R conſtitutum ſit in ipſo vertice A, quoniam ibi FT vertitur in FR, erit RD $= \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2} = \frac{P}{4}$. Hæc adhuc de corporis revolutione per ellipſim.

CA-

Digitized by Google

CAPUT IV.

De revolutione corporis vel per parabolam, vel per hyperbolam vi centripeta ad focum tendente.

MIraberis fortaſſe, mi Torquate, quod cum de ellipſi, ſatis, ut mihi videor, diligenter, ſupra egerim, nunc de parabola, atque hyperbola ſeorſim agere inſtituam. Quæ enim in duabus his curvis occurrunt, quod per te ipſe facile intelliges, eadem fere ſunt, quæ in ellipſi, eodemque fere modo demonſtrantur; itaque ſi te ſuperiori capite monuiſſem, ut, quæ legeres, eadem ad ellipſim primum, tum ad parabolam, deinde ad hyperbolam accommodares, videbor facile e duobus capitibus unum facere potuiſſe, ac breviorem librum contexere. Potuiſſem etiam generalibus uti formulis, quæ in ſectiones omnes convenirent, quæque ad brevitatem videntur factæ. Atque has ego quidem adhibuiſſem, ſi tantum in eis confiderem, quantum hi ſolent, qui illas adhibent. Ego vero ſic ſentio, generales illas formulas ad rerum perceptarum memoriam tuendam valere quidem plurimum, ad res ipſas percipiendas non admodum; quas res profecto numquam ſatis perceptas habeas, niſi unamquamque prius accurate definiveris, & in ſuas partes diſtinxeris, ac demum partes ſingulas ſeorſim inſpexeris, ac diligenter ſcrutatus fueris. Porro ex hac inſpectione ducuntur plerumque formulæ, vel certe manifeſtiores fiunt. Neque vero longiorem me fore exiſtimavi, ſi hæc ſcribere ingreſſus, ubi de ellipſi ſeparatim diſſeruiſſem, parabolæ deinde, atque hyperbolæ caput proprium tribuiſſem. Non enim, puto, plus temporis inſumes, caput hoc legens, quam ſi, ſuperius cum legeres, hærere in locis ſingulis debuiſſes, eademque modo ad parabolam, modo ad hyperbolam per te ipſe transferre. Ego vero breviorem librum, non eum judico, qui paucioribus paginis contineatur, ſed eum, in quo legendo, intelligendoque minus temporis ſit inſumendum. Itaque ea mihi ſemper videntur ſcribi breviter, quæ perſpicue ſcribuntur. Habes, Torquate, conſilii noſtri rationem. Nunc ad rem ipſam veniamus.

De

De revolutione corporis per parabolam vi centripeta ad ſocum tendente.

Lemmata quædam e geometria petita.

78. Sit parabola quævis AR, vertex A, focus F; parameter axis primarii ſit P. Hanc parametrum appellabo poſthac parametrum parabolæ. *Fig. 25.*

Sume in ea punctum quodvis R. Duc FR, deinde FT perpendicularem ad tangentem RT, ac tandem diametrum RD. Dico, parametrum parabolæ P eſſe $= \frac{4FT^2}{FR}$. Dico etiam parametrum diametri RD eſſe $= 4FR$. Quod ſi duxeris lineam uz parallelam tangenti RT, quæ ſecet FR in u, RD in z, erit $Ru = Rz$. Quæ omnia facillima demonſtratu ſunt.

79. Iiſdem poſitis, ſit arcus RL infiniteſimus. Ducatur Lz parallela tangenti RT, ſecanſque FR in u, RD in z. Tandem ducatur LQ perpendicularis ad FR. Dico eſſe P : LQ :: LQ : Ru, ideoque $Ru = \frac{LQ^2}{P}$.

Dem. Cum ſit Lz ordinata ad diametrum RD, reſpondens abſciſſæ Rz; ſitque diametri RD parameter $= 4FR$ (78.), erit $Lz = \sqrt{4FR \times Rz}$. Ac cum poſſit Lz confundi cum Lu; eſt enim uz infiniteſima ſecundi ordinis (30.); ſitque $Rz = Ru$ (78.), erit $Lu = \sqrt{4FR \times Ru}$. Hoc poſito ſic colligo. Propter ſimilitudinem triangulorum FRT, LuQ eſt FR : FT :: Lu : LQ. Ergo $FR \times LQ = FT\sqrt{4FR \times Ru}$. Ergo $FR \times LQ^2 = 4FT^2 \times Ru$, & $LQ^2 = \frac{4FT^2}{FR} \times Ru$. Atqui $\frac{4FT^2}{FR} = P$ (78.). Ergo $LQ^2 = P \times Ru$, & tandem $Ru = \frac{LQ^2}{P}$. Q. e. d.

De revolutione corporis per parabolam.

80. Volvatur corpus per parabolam AR vi centripeta tendente ad focum F, ſitque parameter = P. Sume arcum quemvis infiniteſimum RL, quem corpus certo *Fig. 26.*

Digitized by Google

tempuſculo percurrat; duc deinde LQ perpendicularem ad FR; tum FT perpendicularem tangenti RT.

Dico vim centripetam, quam corpus habet in R, exprimi per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$; ac ſi velocitas, quam corpus habet in R, ſit $= u$, exprimi vim centripetam etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$.

Demonſtro primam partem. Ducatur Lu parallela tangenti RT, ſecans FR in u. Exprimet ſane Ru vim centripetam, quam habet corpus in R (32.): atqui eſt R$u = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (79); ergo $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$ vim centripetam exprimit. Q. e. d.

Demonſtro partem alteram. Vis centripeta in R exprimitur, ut modo oſtendi, per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$; atqui eſt LQ $= \frac{FT \times u}{FR}$ (37), ideoque $LQ^2 = \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{\overline{FR}^2}$, ergo vis centripeta in R exprimetur etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$. Q. e. d.

81. His viſis dico vim centripetam in quovis puncto R ejuſdem parabolæ eſſe reciproce proportionalem quadrato diſtantiæ a foco F, nempe eſſe $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$.

Dem. Quoniam volumus, arcum RL, ubicumque ſit, eum ſemper eſſe, qui æquali tempore percurratur, erit area RFL perpetuo æqualis (38.). Sit ergo area RFL $= 1$. Atqui eſt LQ proportionalis areæ RFL diviſæ per FR. Ergo LQ $= \frac{1}{FR}$, & $LQ^2 = \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Eſt autem vis centripeta $= \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (80.). Erit igitur vis centripeta $= \frac{1}{P \times \overline{FR}^2}$. Et quoniam in eadem parabola eſt P conſtans, ideoque e formula expungi poteſt, erit tandem vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Q. e. d.

82. Satis jam conſtat & vim centripetam, & velocitatem in parabola perpetuo variare; eſt enim vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$ (81.); velocitas $= \frac{1}{FT}$ (41.), quæ quantitates perpetuo variant. Nunc jam revolutiones corporum per duas diverſas parabolas conſideremus.

83.

Digitized by Google

83. Volvantur duo corpora per duas parabolas AR, *ar*, viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*. Sint parametri P, *p*. Vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, *f*. His poſitis ſumantur duo quævis puncta R, *r*, ducanturque FT, *ft* perpendiculares tangentibus RT, *rt*. Dico, velocitatem in R eſſe ad velocitatem in *r*, uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$. *Fig.* 27. 28.

Dem. Sit velocitas in R $= V$; in $r = u$. Erit vis centripeta in R $= \frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2}$; in $r = \frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2}$ (80.). Erit etiam, uti nunc ſupponimus, vis centripeta in R $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$; in $r = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. Pone ergo æquationes duas $\frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2} = \frac{1}{\overline{FR}^2}$, & $\frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2} = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. E prima æquatione elicies $V = \frac{\sqrt{P}}{FT}$, ex altera elicies $u = \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Eſt ergo V (velocitas in R) ad *u* (velocitatem in *r*), uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$. Q. e. d.

84. Erit ergo, in hujuſmodi parabolis, $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ generalis formula velocitatem exprimens in quovis puncto R.

85. Volvantur duo corpora per duas parabolas AR, *ar* viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*. Sint parametri P, *p*. Vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, *f*. His poſitis ſumantur arcus duo infiniteſimi RL, *rl*, qui æqualibus tempuſculis percurrantur, compleanturque areæ RFL, *rfl*. Dico areas RFL, *rfl* eſſe proportionales radicibus parametrorum.

Dem. Ductis FT, *ft* perpendicularibus ad tangentes RT, *rt*, erit velocitas in R ad velocitatem in *r*, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$ (40.); nec non etiam uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$ (83.). Erit ergo $\frac{RFL}{FT} : \frac{rfl}{ft} :: \frac{\sqrt{P}}{FT} : \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Ergo etiam $RFL : rfl :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$. Q. e. d.

86. Neque id minus valebit, ſi fuerint arcus RL, *rl*, ideoque etiam areæ RFL, *rfl* aſſignabiles. Quod facile intelliges, ſi ambo tempora in tempuſcula totidem reſolvas inter ſe æqualia, tum areas in areolas ipſis reſpondentes.

87. Volvantur duo corpora per duas parabolas AR, *ar*, viri- *Fig.* 29. 30.

viribus centripetis tendentibus ad focos F, f, ſintque vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis. Dico, tempora, quibus duæ quævis areæ PFV, pfu deſcribuntur, proportionalia eſſe areis ipſis diviſis per radices parametrorum.

Dem. Sint arcus RL, rl percurſi æquali tempore, compleanturque areæ RFL, rfl. Hoc facto ſic colligo. Tempora, quibus deſcribuntur areæ PFV, pfu, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per areas RFL, rfl (42.). Sed areæ RFL, rfl ſunt uti radices parametrorum (85.). Ergo tempora, quibus deſcribuntur areæ PFV, pfu, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per radices parametrorum. Q. e. d.

Fig. 31. 88. *Problema*. Volvatur corpus per parabolam AR vi centripeta tendente ad focum F. Puta jam ipſum cadere e quovis parabolæ puncto R verſus F, vi centripeta, quam habet in R, ipſum conſtanter urgente. Invenire punctum D, ad quod cum corpus cadendo pervenerit, obtineat velocitatem æqualem illi, quam, ſe volvens per parabolam, habet in puncto R.

Ducatur FT perpendicularis ad tangentem RT, ſitque parameter parabolæ $= P$. His poſitis, ſit velocitas in puncto R $= u$. Erit vis centripeta in eodem puncto R $= \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$ (80.). Sit RD $= x$. Velocitas, quam corpus cadens obtinet in D, eſt æqualis duabus radicibus ſpatii ipſius RD ducti in vim centripetam (29.). Erit ergo velocitas in D $= 2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}}$. Pone igitur æquationem $2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}} = u$. Prodibit hinc x (RD) $= \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$. Nempe quarta proportionalis poſt $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri. Q. e. i.

Quoniam hæc quarta proportionalis ubique æqualis eſt ipſi RF, idcirco corpus cadens, e quocumque parabolæ puncto cadat, tum demum velocitatem quæſitam obtinet, cum ad focum pervenit.

89. Quod ſi punctum R conſtitutum ſit in ipſo vertice A, quoniam ibi FT vertitur in FR, erit RD $= \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FR}^2} = \frac{P}{4}$.

De revolutione corporis per hyperbolam vi centripeta ad focum tendente.

Lemmata quædam e geometria petita.

90. SIt hyperbola A R. Vertex A. Centrum C. Semiaxis primus C A; ſemiaxis ſecundus C D. Parameter axis primi ſit P. Hanc parametrum vocabo poſthac parametrum hyperbolæ. Focus interior ſit F, qui nempe intra concavum hyperbolæ eſt; nam alterum, ſi quando indicare oportuerit, exteriorem vocabo. *Fig.* 32.

91. Sumto in ea quovis puncto R, ducatur C R ſemidiameter, & C M ſemidiameter conjugata. Ducatur F R, producaturque, donec ſecet C M productam in G. Dico eſſe $RG = CA$.

92. Dico etiam, rectangulum ex C A, & C D æquale eſſe parallelogrammo ex C R, & C M. Quare ducta RO perpendiculari ad C M, erit $RO \times CM = CA \times CD$. Unde $CM : CA :: CD : RO$. Quæ demonſtratu facillima ſunt.

93. Sit jam arcus infiniteſimus R L; ducaturque L *u* parallela ſemidiametro C M, ſecanſque F R in *u*. Ducatur præterea L Q perpendicularis ad F R. Dico eſſe $P : LQ :: LQ : Ru$; ideoque $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$.

Id facile oſtendes, ſi, producta L *u*, donec ſecet perpendicularem R O productam in *z*, & ſemidiametrum C R productam in *x*, animadverteris, triangula duo R *u z*, L *u* Q ſimilia eſſe, eſſeque $Ru : Rz :: Lu : LQ$. Sic enim inventis R *z*, & L *u*, facile intelliges, quo modo ſe habeat L Q ad R *u*.

Quæramus igitur primum R *z*. Cum ſit axis primus $= 2CA$, erit axis ſecundus $= \sqrt{P \times 2CA}$, & $CD = \sqrt{\frac{P \times CA}{2}}$. Eſt autem $CM : CA :: CD : RO$ (92.). Erit igitur $RO = \frac{CA\sqrt{\frac{P \times CA}{2}}}{CM}$. Atqui propter ſimilitudinem triangulorum ROG,

R *z u*

Rzu eſt RG, ſive CA (91.) : $RO :: Ru : Rz$. Ergo $Rz = \frac{Ru\sqrt{\frac{P \times CA}{2}}}{CM}$.

Quæramus nunc Lu. Primum propter ſimilitudinem triangulorum ROC, Rzx, eſt $RO : RC :: Rz : Rx$. Hic pro RO, & Rz ſubſtitue valores modo inventos, habebiſque $Rx = \frac{RC \times Ru}{CA}$. Deinde cum poſſit Lu confundi cum Lx ordinata ad diametrum ductam per R, eſt enim ux differentia infiniteſima ſecundi ordinis (30); ſequitur ex ipſa hyperbolæ natura, ut ſit $\overline{CR}^2$ ad $\overline{CM}^2$, uti $2CR \times Rx$ ad $\overline{Lu}^2$. Hic pro Rx ſubſtitue valorem modo inventum, habebiſque $Lu = CM\sqrt{\frac{2Ru}{CA}}$.

Lineis Rz, Lu ſic inventis, cum ſit, ut initio dixi, $Ru : Rz :: Lu : LQ$, invenies ſtatim $LQ = \sqrt{P \times Ru}$; unde $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Q. e. d.

De revolutione corporis per hyperbolam.

Fig. 26. 94. Volvatur corpus per hyperbolam AR vi centripeta tendente ad focum F, ſitque parameter hyperbolæ $= P$. Sume arcum quemvis infiniteſimum RL, quem corpus certo tempuſculo percurrat. Duc deinde LQ perpendicularem ad FR, tum FT perpendicularem tangenti RT.

Dico, vim centripetam, quam corpus habet in R, exprimi per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$; ac ſi velocitas, quam corpus habet in R, ſit $= u$, exprimi vim centripetam etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$.

Demonſtro primam partem. Ducatur Lu parallela tangenti RT ſecans FR in u. Exprimet ſane Ru vim centripetam, quam corpus habet in R (32.), atqui eſt $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (93.). Ergo $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$ vim centripetam exprimit. Q. e. d.

Demonſtro partem alteram. Vis centripeta in R exprimitur, ut modo oſtendi, per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Atqui eſt $LQ = \frac{FT \times u}{FR}$ (37.)

(37.), ideoque $LQ^2 = \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{FR^2}$. Ergo vis centripeta in R exprimitur etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$. Q. e. d.

95. His viſis dico, vim centripetam in quovis puncto R ejuſdem hyperbolæ eſſe reciproce proportionalem quadrato diſtantiæ a foco F, nempe eſſe $= \frac{t}{\overline{FR}^2}$.

Dem. Quoniam volumus, arcum RL, ubicumque ſit, eum ſemper eſſe, qui æquali tempore percurratur, erit area RFL perpetuo æqualis (38.). Sit ergo area RFL $= t$. Atqui eſt LQ proportionalis areæ RFL diviſæ per FR. Ergo LQ $= \frac{t}{FR}$, & $\overline{LQ}^2 = \frac{t}{\overline{FR}^2}$. Eſt autem vis centripeta $= \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (94.). Erit igitur vis centripeta $= \frac{t}{P \times \overline{FR}^2}$. Et quoniam in eadem hyperbola eſt P conſtans, ideoque e formula expungi poteſt, erit tandem vis centripeta $= \frac{t}{\overline{FR}^2}$. Q. e. d.

96. Conſtat jam & vim centripetam, & velocitatem in hyperbola perpetuo variare. Eſt enim vis centripeta $= \frac{t}{\overline{FR}^2}$ (95.); velocitas $= \frac{t}{FT}$ (41.); quæ quantitates perpetuo variant. Nunc jam revolutiones corporum per duas diverſas hyperbolas conſideremus.

97. Volvantur duo corpora per duas hyperbolas AR, *ar* viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*. Sint parametri P, *p*. Vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, *f*. His poſitis ſumantur duo quævis puncta R, & *r*; ducanturque FT, *ft* perpendiculares tangentibus RT, *rt*. Dico velocitatem in R eſſe ad velocitatem in *r*, uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$. *Fig.* 27. 28.

Dem. Sit velocitas in R $= V$; in $r = u$. Erit vis centripeta in R $= \frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2}$; in $r = \frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2}$ (94.). Erit etiam, uti nunc ſupponimus, vis centripeta in R $= \frac{t}{\overline{FR}^2}$; in $r = \frac{t}{\overline{fr}^2}$. Pone ergo æquationes duas $\frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2} = \frac{t}{\overline{FR}^2}$, & $\frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2}$

=

$= \frac{p}{ft^2}$. E prima æquatione elicies $V = \frac{\sqrt{P}}{FT}$; ex altera $u = \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Eſt ergo V (velocitas in R) ad u (velocitatem in r), uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$. Q. e. d.

98. Erit ergo, in hujuſmodi hyperbolis, $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ generalis formula velocitatem exprimens in quovis puncto R.

99. Volvantur duo corpora per duas hyperbolas AR, *ar*, viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*. Sint parametri P, *p*. Vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, *f*. His poſitis ſumantur arcus duo quivis infiniteſimi RL, *rl*, qui æqualibus tempuſculis percurrantur, compleanturque areæ RFL, *rfl*. Dico, has areas eſſe proportionales radicibus parametrorum.

Dem. Ductis FT, *ft* perpendicularibus ad tangentes RT, *rt*, erit velocitas in R ad velocitatem in *r*, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$ (40.), nec non etiam uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$ (97.). Erit ergo $\frac{RFL}{FT} : \frac{rfl}{ft} :: \frac{\sqrt{P}}{FT} : \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Ergo etiam $RFL : rfl :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$. Q. e. d.

100. Neque id minus valebit, ſi fuerint arcus RL, *rl*, ideoque etiam areæ RFL, *rfl* aſſignabiles. Quod facile intelliges, ſi ambo tempora in tempuſcula totidem reſolvas inter ſe æqualia, tum areas in areolas ipſis reſpondentes.

Fig. 29 30. 101. Volvantur duo corpora per duas hyperbolas AR, *ar*, viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*. Vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis. Dico, tempora, quibus duæ quævis areæ PFV, *pfu* deſcribuntur, proportionalia eſſe areis ipſis diviſis per radices parametrorum.

Dem. Sint arcus RL, *rl* percurſi æquali tempore, compleanturque areæ RFL, *rfl*. Tempora, quibus deſcribuntur areæ PFV, *pfu*, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per areas RFL, *rfl* (42.); ſed areæ RFL, *rfl* ſunt uti radices parametrorum (99.); ergo tempora, quibus deſcribuntur areæ PFV, *pfu*, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per radices parametrorum. Q. e. d.

Fig. 31. 102. *Problema*. Volvatur corpus per hyperbolam AR vi centripeta tendente ad focum F. Puta jam ipſum cadere e quovis

vis hyperbolæ puncto R verſus F, vi centripeta, quam habet in puncto R, ipſum conſtanter urgente. Invenire punctum D, ad quod cum corpus cadendo pervenerit, obtineat velocitatem æqualem illi, quam, ſe volvens per hyperbolam, habet in puncto R.

Ducatur FT perpendicularis ad tangentem RT; ſitque parameter hyperbolæ $= P$. His poſitis, ſit velocitas in $R = u$. Erit vis centripeta in eodem puncto $R = \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$ (94.). Sit $RD = x$. Velocitas, quam corpus, cadens, obtinet in D, eſt æqualis duabus radicibus ſpatii ipſius RD ducti in vim centripetam (29.). Erit ergo velocitas in $D = 2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}}$.

Pone igitur æquationem $2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}} = u$. Prodibit hinc x $(RD) = \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$. Nempe quarta proportionalis poſt $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri. Q. e. i.

Et quoniam quarta proportionalis poſt $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri ubique eſt major, quam RF, idcirco corpus cadens a puncto R propoſitam velocitatem non acquirit, niſi ultra focum.

103. Quod ſi punctum R conſtitutum ſit in ipſo vertice A, quoniam ibi FT vertitur in FR, erit $RD = \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2} = \frac{P}{4}$.

APPENDIX AD CAP. IV.

NOtiſſimum apud Mechanicos, nobiliſſimumque theorema illud eſt. Si corpus a puncto quopiam trahatur, ea quidem lege, ut ſit vis attrahens reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ; atque interim directione, & velocitate qualibet tranſverſim pellatur; percurret ſectionem conicam. Demonſtrari id ſolet per calculos, & artificia reconditiora. Ego cum vellem, ſi poſſem, hunc etiam locum planiorem facere, in idque incumberem, ſtatim ſenſi, problematis cuiuſdam explicatione mihi opus eſſe e geometria plane petenda. Qua de

re cum Canterzanum, quem tu, Varene ſuaviſſime, probe noſti, miro ingenio juvenem conſuluiſſem, iſque problema propoſitum apud auctores, quotcumque illi præſto erant, fruſtra quæſiviſſet, maluit tandem ſuum ipſe ingenium periclitari, quam Mathematicorum verſans volumina tempus terere. Rem ergo totam, eleganti quodam præmiſſo lemmate, ſynthetice expedivit, & breviter, ut nihil illi ad ſummam elegantiam deeſſe videretur. Quid lemmatis id ſit, quoque problema illud ſpectet, paucis oſtendam; demonſtrationes prætermittam; quas per te ipſe invenias volo, ne Canterzano omnia debeas. Ad quæſtionem mechanicam, quam initio propoſui, veniam poſtea.

Lemma.

Fig. 33. 34. 104. Sit ſectio quævis conica RP (Fig. 33., & 34.), cujus axis FA. Sitque F focus ejus ſive interior (fig. 33.) [quo caſu poteſt RP vel ellipſis eſſe, vel parabola, vel hyperbola], ſive exterior (fig. 34.) [quo caſu non poteſt eſſe RP, niſi hyperbola]. Sumto in ea puncto quovis R, ducatur FT perpendicularis ad tangentem RT, atque ut eſt dimidia pars parametri ad FT, ſic ſit FT ad FS; ſumaturque FS in linea ipſa FR vel ad partem R (fig. 33.), vel ad oppoſitam (fig. 34.). Hoc facto ducatur linea ST. Dico lineam ST fore parallelam axi FA. Ac lemma quidem huc ſpectat. Ad problema veniamus.

Problema Geometricum.

Fig. 35. 36. 37. 38. 105. Data recta FR (fig. 35. 36 37. 38.), datoque angulo acuto FRT, ſectionem conicam deſcribere, quæ focum habeat, ſive interiorem, ſive exteriorem in F; deinde ſic tranſeat per R, ut ſit RT tangens; ac demum parametrum habeat æqualem datæ lineæ P.

Solutio huc ſpectat. Ducatur FT perpendicularis ad RT; ac fiat uti dimidia pars lineæ P ad FT, ita FT ad FS, ſumaturque FS in FR, vel ad partem R (fig. 35. 36. 37.), vel ad oppoſitam (fig. 38.), ducaturque indefinita FC parallela TS. Hoc facto producta TR in V, ducatur per R linea XY, ſic ut anguli VRX, FRT, ad eamdem partem lineæ TV, æquales ſint.

Hic

Hic ſane, ſumta FS ad partem R, vel linea XY concurret cum FC ad partem X in X, (fig. 35.), vel erit ei parallela (fig. 36.), vel concurret cum ea ad partem Y in Y (fig. 37.). Sumta vero FS ad partem oppoſitam (fig. 38.) numquam non concurret ad partem Y in Y.

In primo caſu (fig. 35.) ellipſim deſcribe, quæ focos habeat in F, & X, quæque tranſeat per punctum R. In ſecundo caſu (fig. 36.) parabolam deſcribe, quæ focum habeat in F, incidente axe in FC, quæque tranſeat per R. In tertio caſu (fig. 37.) hyperbolam deſcribe, quæ focum habeat interiorem in F, exteriorem in Y, quæque tranſeat per punctum R. In quarto caſu (fig. 38.) hyperbolam deſcribe, quæ focum habeat interiorem in Y, exteriorem in F, quæque tranſeat per punctum R. Hæ ſcilicet ſectiones conicæ, in ſingulis caſibus deſcriptæ, illæ ipſæ erunt, quas invenire oportebat. Quamquam ſi angulus datus FRT rectus fuerit, problema erit multo expeditius, ac prope omne artificium reſpuet.

Problema Mechanicum.

106. PRojiciatur corpus e puncto R data quavis directione RT, & data quavis velocitate V. Interim vi *Fig. 39.* centripeta quavis data G trahatur verſus datum centrum F; atque ea ſit attractionis lex, ut vis attrahens reciproce proportionalis ſit quadrato diſtantiæ a puncto F. Invenire curvam RQ, quam corpus percurret.

Ducatur FT perpendicularis ad RT. Tum conſtituatur recta RD, per quam ſi corpus e puncto R cadat, vi G conſtanter urgente, obtineat in puncto D velocitatem V. Tum fiat uti $\overline{FR}^2$ ad $\overline{FT}^2$, ita RD ad lineam aliam quamdam, cujus quadrupla ponatur linea P; ideoque ſit $RD = \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$. His ad hunc modum conſtitutis deſcribatur ſectio conica RQ (105.), cujus focus interior ſit punctum F, tangens RT, parameter P. Dico, ſectionem conicam RQ eſſe curvam illam, quam corpus datum percurret.

Dem. Fingamus corpus quodpiam volvi per ſectionem conicam, quam deſcripſimus, RQ, vi centripeta tendente ad focum F, eſſeque in R vim ejus centripetam $= G$. Id enim fieri poſſe oſtendimus (44.). Corpus hoc, quod fingimus, ha-

Digitized by Google

bet profecto in R conditiones omnes, quas habet in eodem puncto R corpus datum, quibuſque percurrenda curva determinatur. Nam præter quam quod eamdem habet vim centripetam G, eamdemque diſtantiam a centro trahente F, eamdemque vis centripetæ directionem; quæ quidem omnia e conſtructione ipſa conſtant; habet etiam attractionis legem cum corpore dato communem; conſtat quippe, vim centripetam in eo corpore, quod per ſectionem conicam volvitur, ſi utique ad ſocum tendat, eſſe reciproce proportionalem quadrato diſtantiæ (62. 81. 95.). Neque vero dubitari poteſt, quin corpus, quod fingimus, eamdem etiam habeat projectionis directionem, quam corpus datum; nam habet utique directionem tangentis RT. Habet etiam eamdem velocitatem; nam cum ſit $RD = \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$, habet utique velocitatem, quam haberet in D, ſi illuc caderet vi G conſtanter urgente (76. 88. 102.). Hæc autem ex conſtructione eſt illa ipſa velocitas V, quam corpus datum habet in puncto R. Ambo ergo hæc corpora, & quod fingimus, & quod datum eſt, conditiones illas omnes communes habent, quibus percurrenda curva determinatur (44.). Ergo eamdem curvam percurrunt. Ergo corpus datum percurrit ſectionem conicam RQ. Q. e. d.

Ea re non modo oſtendimus, corpus datum ſectionem conicam debere percurrere, ſed etiam ſectionis hujus conicæ inveniendæ viam quamdam aperuimus.

CAPUT V.

De revolutionibus duorum corporum ſe mutuo trahentium.

Illud adhuc nobis conſtans fuit, ut, corporibus duobus ſe mutuo trahentibus, alterum immobile in centro virium poneremus, alterius converſionem explicaremus. Ponamus nunc mobilia ambo, ac de duorum revolutionibus pauca dicamus. Quod ſi quæſtionem vel ad plura corpora traduxeris, vel in duobus omni modo variaveris; in ea ſtatim incurres, quæ reconditiſſima habentur, ac difficillima, nec niſi ab excellentiſſimis mathematicis tractari ſolent. Ego, quæ prima in hac re occur-

Digitized by Google

occurrunt, vix attingam, ut deſiderium excitem; quæ ſubtiliora ſunt, excellentiſſimis illis relinquam. Sed antequam ad rem venio, lemmatis loco id pono.

107. *Lemma*. Sit punctum C poſitum intra concavum curvæ PQ, ſumroque in curva arcu quovis infiniteſimo PE, ducantur CP, CE. Ducatur etiam tangens PD occurrens rectæ CE in D; ac demum ducatur EB parallela CP, ſecanſque PD in B. Dico, lineolam BD eſſe infiniteſimam tertii ordinis. *Fig.* 40.

Dem. Ducatur EG parallela tangenti PD ſecans CP in G. Hic ſane erit GP infiniteſima ſecundi ordinis (vide 30.), ideoque etiam EB. Jam vero cum ſit CP : PD :: EB : BD, ſit autem PD infiniteſima, ſi comparetur cum CP; erit etiam BD infiniteſima, ſi comparetur cum EB. Erit ergo BD infiniteſima tertii ordinis. Q. e. d.

108. Quod cum ita ſit, poterit jam ſumi PD pro PB, & DE pro EB. Ideoque ſi corpus quodpiam, vi centripeta tendente verſus C, percurrat arcum PE, putari poterit, lineam PD exprimere velocitatem tangentialem, lineam DE velocitatem initialem a vi centripeta ortam; ac corpus eo tempore percurrere arcum PE, quo tempore ſola vi tangentiali percurreret lineam PD, aut ſola vi centripeta percurreret lineam æqualem lineæ DE.

109. His viſis ad propoſitum venio. Sint corpora duo P, *p* ſe mutuo trahentia. Recta P*p* ſic dividatur in C, ut ſit maſſa P ad maſſam *p*, uti C*p* ad CP. Quo facto dicetur C centrum commune gravitatis. Projiciantur jam corpora directionibus contrariis, & parallelis PD, *pd*; ambo quidem æquali vi; ideoque ſint projectionum velocitates reciproce proportionales maſſis (10.) ſitque propterea velocitas corporis P ad velocitatem corporis *p*, uti CP ad C*p*. Projecta ad hunc modum corpora duas curvas PQ, *pq* deſcribent, quibus curvis quid accidat per theoremata tria expediam. *Fig.* 41.

110. *Theor. I.* Lineolæ infiniteſimæ PD, *pd* ea longitudine ſumantur, ut exprimant velocitates projectionum; ideoque ſit PD : *pd* :: CP · C*p*. Ducatur præterea recta D*d*, quæ, ut facile conſtat, tranſibit per C, ſecabitque curvas PQ, *pq* in E, & *e*. His poſitis dico primum, arcus PE, *pe* percurri a corporibus æquali tempore. Dico ſecundo, triangula PED, *ped* ſimilia eſſe. Dico tertio, ſimilia quoque eſſe triangula PCE, *pCe*.

De-

Demonſtro primam partem. Ex conſtructione lineolæ PD, *pd* proportionales ſunt velocitatibus projectionum; ergo corpora, ſi vi ſola tangentiali ferrentur, percurrerent lineolas PD, *pd* æquali tempore (5.). Atqui quo tempore vi ſola tangentiali percurrerent lineolas PD, *pd*, eodem tempore vi compoſita percurrunt arcus PE, *pe* (108.). Ergo percurrunt arcus PE, *pe* æquali tempore. Quod erat primo demonſtrandum.

Demonſtro partem alteram. Lineolæ PD, *pd* ex conſtructione ſunt reciproce proportionales maſſis. Lineolæ DE, *de* exprimunt velocitates initiales (108.), ideoque ſunt, & ipſæ reciproce proportionales maſſis (18.): eſt ergo DP : DE :: *dp* : *de*. Atqui cum ſint PD, *pd* parallelæ, ſunt etiam anguli D, *d* æquales. Ergo triangula PED, *ped* ſunt ſimilia. Quod erat ſecundo loco demonſtrandum.

Demonſtro partem tertiam. Propter ſimilitudinem triangulorum PED, *ped*, æquales ſunt anguli PED, *ped*; ergo æquales ſunt etiam anguli adjacentes PEC, *pe*C. Quare cum in triangulis PCE, *p*C*e* æquales ſint etiam anguli ad verticem C conſtituti, ſequitur, ut triangula PCE, *p*C*e* ſimilia ſint. Quod erat tertio loco demonſtrandum.

Porro ſi lineas PE, *pe* produxeris in H, & *h*, ut ſit PE = EH, & *pe* = *eh*; tum duxeris rectam H*h*, quæ ſane tranſibit per C, ſecabitque curvas PQ, *pq* in punctis M, & *m*; eadem demonſtratione, qua modo uſi ſumus, facile oſtendes primum quidem, arcus EM, *em* percurri æquali tempore; deinde triangula EMH, *emh* ſimilia eſſe; tertio demum ſimilia quoque eſſe triangula ECM, *e*C*m*. Eademque ratio produci in infinitum poterit, donec curvas totas PQ, *pq* expleas.

111. *Theor. II.* Iiſdem poſitis, dico, curvas PQ, *pq* eſſe ſimiles. Id ſic efficio. Propter ſimilitudinem triangulorum PCE, *p*C*e*, quam modo demonſtravimus, eſt PE : EC :: *pe* : *e*C; itemque propter ſimilitudinem triangulorum ECM, *e*C*m*, eſt EC : EM :: *e*C : *em*. Eſt ergo PE : EM :: *pe* : *em*. Præterea ex eorumdem triangulorum ſimilitudinibus ſequitur, ut ſit angulus PEC æqualis angulo *pe*C, & angulus CEM angulo C*em*; ideoque etiam totus angulus PEM toti angulo *pem*. Sunt ergo curvarum latercula PE, EM, & *pe*, *em* circa æquales angulos proportionalia. Quare cum ratio eadem ad latercula alia omnia transferri poſſit, conſtat curvas PQ, *pq* eſſe ſimiles. Q. e. d.

Ex

Ex his, quæ hactenus dicta ſunt, corollaria haud pauca duci poſſunt, quæ demonſtratione vix indigent. Horum nonnulla recenſeamus.

112. *Corol. I.* Ducta per C recta quavis Mm, quæ ſecet curvas PQ, pq in M, & m, quo tempore corpus P percurrit arcum PM, eodem tempore corpus p percurret arcum pm. Itaque erunt ſemper duo corpora in directum cum puncto C.

113. *Corol. II.* Quoniam eſt $CP : Cp :: CE : Ce$, necnon etiam $CE : Ce :: CM : Cm$, ac ſic deinceps; erit etiam $CP : Cp :: CM : Cm$. Cum ſint ergo CP, & Cp reciproce proportionales maſſis, erunt reciproce proportionales maſſis etiam CM, & Cm. Conſtitutis ergo corporibus in M, & m, erit adhuc punctum C centrum commune gravitatis. Quare volventibus ſe corporibus per curvas PQ, pq, commune gravitatis centrum immotum manebit.

114. *Corol. III.* Quoniam trahentia ſe mutuo corpora, & percurrentia curvas PQ, pq, ſunt ſemper, ut modo dixi, in directum cum puncto C, patet vim centripetam utriuſque corporis ad idem punctum C perpetuo dirigi. Poſſunt ergo ambo corpora in ſuis illis revolutionibus perinde haberi, ut ſi traherentur ab ipſo puncto C ea vi, qua trahunt ſe mutuo.

115. Antequam theorema tertium expedio, placet lemma unum præmittere, quod eſt hujuſmodi. Ducta, ut ſupra, recta quavis Mm, quæ tranſeat per C, ſecetque curvas PQ, pq in M & m, dico eſſe $\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2 :: \overline{CP}^2 : \overline{CM}^2$. Eſt enim, ut in corollario altero monui, $CP : Cp :: CM : Cm$. Ergo $CP + Cp$ $(Pp) : CP :: CM + Cm$ $(Mm) : CM$. Ergo $\overline{Pp}^2 : \overline{CP}^2 :: \overline{Mm}^2 : \overline{CM}^2$, & $\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2 :: \overline{CP}^2 : \overline{CM}^2$. Q. e. d. Eadem ratione conſtat eſſe etiam $\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2 :: \overline{Cp}^2 : \overline{Cm}^2$.

116. *Theor. III.* Iiſdem, ut ſupra, poſitis, ſi corpora ea lege ſe mutuo trahant, ut ſit vis attractiva reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ, dico, curvas PQ, pq eſſe ſectiones conicas.

Dem. Si corpora ea, quam dixi, lege ſe trahunt, vis, qua trahitur corpus P, dum eſt in P, eſt ad vim, qua trahitur, dum eſt in M, uti $\frac{1}{\overline{Pp}^2}$ ad $\frac{1}{\overline{Mm}^2}$. Quare cum ſit $\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2 : \overline{CP}^2 : \overline{CM}^2$ (115.), vis, qua corpus P trahitur, dum eſt in P, erit ad vim, qua trahitur, dum eſt in M, uti

uti $\frac{1}{\overline{CP}^2} : \frac{1}{\overline{CM}^2}$. Perinde ergo res eſt, ut ſi corpus trahatur ab ipſo puncto C, quemadmodum in corollario tertio monuimus, eaque lege trahatur, ut ſint vires reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a puncto C. Ergo erit PQ ſectio conica (106.); neque minus erit ſectio conica pq, quæ curvæ PQ eſt plane ſimilis.

Inquirenti in hæc diligentius, jucundum erit ſectiones conicas, quas corpora P, & p percurrent, earumque formam, & genus, quæque illis accidanr, cognoſcere. Quæ is quidem facile comperiet, qui ſuperiora intellexerit, ſeſeque paululum exercuerit. Non committam ego, ut, plura de his ſcribens, hanc tibi, Varene ſuaviſſime, voluptatem præripiam.

APPENDIX AD CAP. V.

HActenus corporis trahentis nomine intelleximus maſſam quamdam in unum punctum collectam, ex eoque trahentem. Non erit ab re oſtendere ſphæram homogeneam punctum quodvis extra ipſam poſitum ſic ad ſe trahere, quaſi eſſet ipſa tota collecta in ſuum centrum. Quod cum explicatum fuerit ab aliis aliter; eſt etiam nuper a Canterzano noſtro nullis omnino calculis, quo ingenio eſt, & plane ſynthetice demonſtratum. Idem nunc ego, brevitati conſulens, per integrationem quamdam declarabo, ut, ſi integrales calculos nondum forte, Varene mi, didiciſti, amare tamen jam nunc incipias, & libentius diſcas. Ad propoſitum veniens ſic exordior.

Fig. 42. 117. *Theorema*. Sit AEBF ſuperficies ſphærica homogenea, cujus centrum C; trahatque punctum P extra poſitum. Ea vero attractionis lex ſit, ut vires quadratis diſtantiarum reciproce reſpondeant. Dico, ſuperficiem AEBF non ſecus trahere punctum P, ac ſi tota in centrum C collecta eſſet.

Ut id demonſtrem, ducatur per C recta PC, ſecans ſuperficiem ſphæricam in A, & B. Sumtaque abſciſſa quavis AM ducatur per M planum perpendiculare lineæ PB, quod ſignabit utique in ſuperficie ſphærica circulum quemdam EF. Ducantur denique rectæ AE, PE.

Dem. Sit $CA = a$, $AP = b$, $AM = x$. Erit $AE = \sqrt{2ax}$, & $PE = \sqrt{2ax + 2bx + bb}$. Proportio radii ad circumferentiam ea ſit, quæ r ad c. Invenies jam circulum,

cujus

Digitized by Google

cujus radius AE, ideſt ſegmentum ipſum ſuperficiei ſphericæ EAF, $= \frac{cax}{r}$. Eritque elementum hujus circuli, ſive ſegmenti, $= \frac{cadx}{r}$ exprimens zonulam quamdam EF.

Jam vero vis abſoluta, qua tota hæc zonula trahit punctum P, erit zonula ipſa diviſa per quadratum diſtantiæ PE, nempe $= \frac{cadx}{r \times \overline{2ax + 2bx + bb}}$. Atqui zonula trahit reipſa punctum P, non hac quidem vi abſoluta, ſed vi alia, quæ componitur ex viribus partium omnium zonulam conſtituentium; eſt autem, ut facile oſtendi poteſt, vis abſoluta ad vim hanc compoſitam, uti PE ad PM. Erit ergo vis hæc compoſita $= \frac{ca}{r} \times \frac{\overline{x+b} \times dx}{\overline{2ax + 2bx + bb}^{\frac{3}{2}}}$. Quam formulam commodius integraveris, ſi ponens $2a + 2b = e$, ipſam ſic exſcripſeris $\frac{ca}{r} \times \overline{\frac{xdx}{\overline{ex + bb}^{\frac{3}{2}}} + \frac{bdx}{\overline{ex + bb}^{\frac{3}{2}}}}$. Ubi enim ſic exſcripſeris, ſi feceris $ex + bb = z$, paratiſſima tibi erit integratio, qua confecta integrale prodibit $= \frac{2ca}{eer} \times \frac{ex + 2bb - be}{\sqrt{ex + bb}}$; quod utique exprimet vim, qua totum ſegmentum EAF trahit punctum P, niſi ſi conſtans quæpiam addenda ſit, aut demenda.

Id ergo ſic exploremus. Non eſt dubium, quin ſi ſit x, ideſt AM, $= o$, vis quoque ipſa, qua ſegmentum EAF trahit punctum P, evadat $= o$. Atqui integrale propoſitum, ſi ſit $x = o$, non utique evadit ipſum $= o$, ſed vertitur in conſtantem $\frac{2ca}{eer} \times \overline{2b - e}$. Hæc ergo conſtans integrali propoſito demenda erit. Quod ubi feceris, ſi in locum e reſtitueris ejus valorem $2a + 2b$, exſiſtet tandem integrale

$\frac{ca}{r \times \overline{a+b}^2} \times \overline{\frac{ax + bx - ab}{\sqrt{2ax + 2bx + bb}} + b}$. Idque generatim vim exprimet, qua ſegmentum quodvis EAF trahit punctum P.

Fac ergo $x = 2a$, nempe AM $=$ AB. Erit tibi integrale modo inventum $= \frac{2aac}{r \times \overline{a+b}^2}$, quo ſane exprimetur vis, qua ſuperficies ſphærica tota AEBF trahit punctum P.

Quæramus nunc vim illam, qua ſuperficies eadem AEBF traheret punctum P, ſi tota quidem in centrum C collecta eſ-

ſet. Quoniam ſuperficies ſphærica, ut notum eſt, æquat circulos quatuor maximos, ea ſane erit $= \frac{2aac}{r}$. Quod ſi dividatur per quadratum diſtantiæ PC, ideſt per $\overline{a+b}^2$, fiet jam $= \frac{2aac}{r \times \overline{a+b}^2}$. Quo exprimetur vis illa, qua ſuperficies ſphærica AEBF traheret punctum P, ſi tota quidem in centrum C collecta eſſet.

Non ſecus ergo ſuperficies ſphærica AEBF, quam initio propoſuimus, trahit punctum P, ac ſi tota in centro C ſita eſſet.

Hoc idem ad ſphæram ſolidam, atque homogeneam transferes, ſphæram ipſam in ſuperficies ſphæricas infinitas, & concentricas reſolvens. Valebit enim in ſuperficiebus ſingulis ratio eadem, ideoque etiam in omnium ſumma, ideſt in ſphæra ipſa.

CAPUT VI.

De vi repulſiva.

NOn omnino videar, mi Torquate, hujus libri titulo ſatisfeciſſe, niſi & vim repulſivam, eamque, quæ inde oritur, corporis per hyperbolam converſionem paucis explicem. Id faciam breviter & quaſi curſim; qui enim ſuperiora intellexerit, in his diligentiam minus deſiderabit.

118. Adhuc finximus ineſſe in corporibus attractivam vim quamdam, qua ſe mutuo trahant. Fingamus nunc ineſſe in ipſis vim repulſivam, qua ſe mutuo repellant; atque ut vim attractivam æſtimari voluimus producto maſſarum ſe mutuo trahentium diviſo per diſtantiæ quadratum, ſic nunc vim repulſivam æſtimemus. Repellant ſe mutuo corpora duo A, & B. Sit maſſa corporis $A = M$; corporis $B = m$. Diſtantia, quæ inter corpora intercedit, $= D$. Erit vis repulſiva $= \frac{Mm}{DD}$.

119. Satis conſtat, vim repulſivam æque urgere utrumque corpus; quidquid enim repellit, eadem actione repellitur. Quare ut in attractionibus corporum, ſic etiam in repulſionibus velocitates initiales reciproce proportionales ſunt maſſis (10.). Sed hæc, atque alia mittamus, quæ per ſe quiſque facile intelliget. Pauca tantum de repulſione conſtanti moneamus.

Fig. 43. 120. Quamquam & hæc erunt expeditiſſima, ſi modo intel-

telligatur corpus B, dum certa vi pellitur a corpore A verſus D, perinde haberi poſſe, ac ſi æquali vi traheretur a corpore quopiam poſito ad partem D; eumdem quippe motum, eamdemque velocitatem utrovis modo accipiet. Quare ſi pellatur ex parte A vi conſtanti, perinde erit, ac ſi gravitate conſtanti traheretur ad partem D, eademque illi accident, quæ ſupra explicavimus, ubi de gravitate conſtanti egimus.

121. Si ergo corpus B, vi repulſiva conſtanti actum, excurrat libere verſus D, erit ſpatium, per quod excurrit, in proportione compoſita vis repulſivæ, qua urgetur, & quadrati ejus temporis, quod in illo excurſu inſumit (25.). Sit ſpatium $= S$, vis repulſiva $= G$, tempus $= T$. Erit $S = GTT$.

122. Ideoque tempus recte exprimes per radicem ſpatii diviſi per vim repulſivam, nempe $T = \sqrt{\frac{S}{G}}$.

123. Velocitas excurſus, quoniam exprimitur ſpatio diviſo per tempus, exprimetur per $\sqrt{GS}$, nempe per radicem ſpatii ducti in vim repulſivam.

124. Velocitas vero in fine excurſus, quoniam eſt dupla velocitatis illius, qua ſpatium excurritur, exprimetur per $2\sqrt{GS}$. Quæ manifeſta ſatis erunt, ea repetenti, quæ ſupra de gravitate conſtanti tradidimus.

De motu curvilineo ex vi repulſiva.

125. QUoniam corpus incedens per curvam quamlibet RP vim facit in quolibet puncto R, ut per tangentem RT excurrat; oportet profecto, ſi curvam quidem ſequi debeat, ut vi alia quapiam urgeatur verſus aliquod punctum *u* poſitum intra concavum curvæ. Quod ſi vis hæc illi adveniat a puncto quopiam F, ad convexam curvæ partem poſito, vis repulſiva appellabitur. *Fig.* 44.

126. Sumto arcu quovis infiniteſimo RL, ſi ducatur L*u* parallela tangenti RT, ſecanſque lineam FR productam in *u*, compleaturque parallelogrammum T*u*, exprimet ſane linea RL velocitatem, qua corpus fertur ex R in L, linea RT velocitatem tangentialem, linea R*u* vim repulſivam, ſeu velocitatem initialem a vi repulſiva ortam. Hæc per ſe ſatis patent.

127. Quod ſi per univerſum curvæ tractum vis repulſiva ab eodem ſemper puncto F prodeat, dicetur F centrum repulſio-

nis. Ac ſi duæ rectæ ducantur FR, FP abſcindentes in curva arcum quemvis RP, ſpatium RFP dicetur area. His præmiſſis theoremata quatuor paucis explicemus.

Fig. 45. 128. *Th. I.* Volvatur corpus per curvam RP ex repulſione centri F. Sumto arcu infiniteſimo RL, quem certo tempuſculo corpus percurrat, ducatur LQ perpendicularis ad FR; tum FT perpendicularis tangenti RT. Velocitas, qua corpus percurrit arcum RL, ponatur $= u$. Dico eſſe $LQ = \frac{FT \times u}{FR}$.

Dem. Cum ſit angulus LRT infiniteſimus, anguli LRF, TRF haberi poſſunt tamquam æquales, ac triangula ipſa LRQ, TRF tamquam ſimilia. Quo poſito erit $FR : FT :: RL : LQ$. Ergo $LQ = \frac{FT \times RL}{FR}$. Atqui exprimit RL velocitatem u; ergo $LQ = \frac{FT \times u}{FR}$. Q. e. d.

Fig. 46. 129. *Th. II.* Volvatur corpus per curvam quamlibet AQ ex repulſione centri F. Dico, duas quaſvis areas AFP, AFQ proportionales eſſe temporibus, quibus deſcribuntur.

Erit id expeditiſſimum, ſi illud modo oſtendatur, areolas deinceps infiniteſimas AFR, RFL, quæ quidem æquales ſint, æqualibus deſcribi tempuſculis. Id ergo oſtendamus.

Ducatur LT parallela lineæ RF, ſecans AR productam in T, compleaturque parallelogrammum Tu. Hic jam patet, eſſe Ru vim repulſivam, RT vim tangentialem, atque his duabus componi vim, qua corpus fertur per RL. Ducatur jam FT. Hic ſtatim apparet, triangula RFT, RFL æqualia eſſe, quippe quæ habent eamdem baſim RF, ſuntque inter eaſdem parallelas LT, RF. Quare cum triangulum RFT æquale ſit areæ RFL, atque area RFL poſita ſit æqualis areæ AFR, erunt triangula RFT, AFR æqualia, & baſes AR, RT æquales.

His poſitis ſic colligo. Vis tangentialis, quam exprimit RT, eſt illa ipſa vis, qua corpus fertur per AR, quaque nititur excurrere per RT. Quare cum ſint AR, RT æquales, tempus, quo corpus vi tangentiali percurreret RT, æquale eſt tempori, quo percurrit AR; atqui tempus, quo percurreret RT, æquale eſt tempori, quo percurrit RL (13.); ergo AR, & RL percurruntur æquali tempore, atque areolæ AFR, RFL æqualibus tempuſculis deſcribuntur.

Quapropter erunt areæ AFP, AFQ proportionales temporibus, quibus deſcribuntur; quot enim ex infiniteſimis hiſce areolis utraque illarum continet, tot etiam tempuſculis deſcribitur. 130.

Digitized by Google

130. *Theor. III.* Volvantur duo corpora per duas quaſvis curvas RV, *ru*; ac ſint centra repulſionum F, *f*. Sint arcus duo quivis infiniteſimi RL, *rl*, qui æquali tempore percurrantur, compleanturque areæ RFL, *rfl*; ac tandem ducantur FT, *ft* perpendiculares tangentibus RT, *rt*. Dico, velocitatem corporis in R eſſe ad velocitatem corporis in *r*, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$. Fig. 47. 48.

Hic ſane propter infinitam parvitatem angulorum LRT, *lrt* dicentur triangula RFL, *rfl* inſiſtere tangentibus ipſis RT, *rt*; eruntque ipſorum altitudines FT, *ft*. Hoc poſito rem demonſtro.

Quoniam RL, & *rl* percurruntur æquali tempore, erit velocitas in R ad velocitatem in *r*, uti RL ad *rl* (5.). Atqui eſt $RL = \frac{RFL}{FT}$, & $rl = \frac{rfl}{ft}$; ergo velocitas in R ad velocitatem in *r*, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$. Q. e. d.

131. Neque id minus tenet, ſi puncta R, & *r*, ideoque etiam arcus RL, *rl*, æquali tempuſculo confecti, in eadem curva ſumantur. Et quoniam in eadem curva area RFL eſt conſtans (129.), ideoque $= 1$, erit velocitas in quovis puncto R ejuſdem curvæ $= \frac{1}{FT}$.

132. *Theo. IV.* Volvantur duo corpora per duas quaſlibet curvas VP, *up*, ac ſint centra repulſionum F, *f* Sumantur duo quivis arcus VP, *up*, compleanturque areæ VFP, *ufp*. Sumantur præterea arcus RL, *rl*, qui æquali tempore T percurrantur, compleanturque etiam areæ RFL, *rfl*. Dico, tempus, quo percurritur arcus VP, eſſe ad tempus, quo percurritur arcus *up*, uti eſt area VFP diviſa per aream RFL, ad aream *ufp* diviſam per aream *rfl*, nempe uti $\frac{VFP}{RFL}$ ad $\frac{ufp}{rfl}$. Fig. 49. 50.

Dem. In curva VP eſt utique area RFL ad aream VFP, uti tempus T ad tempus, quo percurritur arcus VP (129.). Ergo tempus, quo percurritur arcus VP, erit $= \frac{VFP \times T}{RFL}$. Similiter in curva *up* invenies tempus, quo percurritur arcus *up*, eſſe $= \frac{ufp \times T}{rfl}$. Eſt ergo illud tempus ad hoc, uti $\frac{VFP \times T}{RFL}$ ad $\frac{ufp \times T}{rfl}$, ideſt uti $\frac{VFP}{RFL}$ ad $\frac{ufp}{rfl}$. Q. e. d.

De

Digitized by Google

De corporis revolutione per hyperbolam ex vi repulſiva foci exterioris.

Lemmata quædam e geometria petita.

Fig. 51. 133. Sit hyperbola ARP; vertex A; focus interior f, exterior F. Ducantur ad quodvis ejus punctum R rectæ FR, fR. Sit ST tangens in puncto R. His confectis ſumatur arcus RL, & ducatur Lu parallela tangenti ST, ſecanſque fR in V, & FR productam in u. Dico eſſe Ru, RV æquales.

Dem. Angulus uRS æqualis eſt angulo TRF, cum ſint ambo ad verticem. Angulus TRF ex natura hyperbolæ æqualis eſt angulo fRT. Ergo anguli uRS, fRT, ſive VRT, æquales. Atqui anguli uRS, VRT æquales ſunt angulis RuV, RVu propter parallelas ST, uV. Ergo æquales etiam anguli RuV, RVu. Ergo æquales etiam lineæ Ru, RV. Q. e. d.

134. Iiſdem poſitis, puta arcum RL eſſe infiniteſimum, atque a puncto L duc LQ, Lq perpendiculares ad FR, fR. Dico eſſe LQ, Lq æquales.

Dem. Anguli LRQ, LRq haberi poſſunt pro æqualibus, non enim differunt, niſi propter angulum infiniteſimum TRL. Quare triangula LRQ, LRq præter duos angulos rectos in Q, & q, habent etiam duos alios æquales angulos LRQ, LRq. Ergo ſunt ſimilia. Ac cum habeant communem hypotenuſam RL, erunt LQ, Lq æquales. Q. e. d.

135. Iiſdem poſitis ſit parameter $=$ P. Dico eſſe R$u = \frac{LQ^2}{P}$.

Dem. Eſt utique RV $= \frac{Lq^2}{P}$ (93.). Atqui eſt LQ $=$ Lq (134.), & R$u =$ RV (133.). Ergo erit etiam R$u = \frac{LQ^2}{P}$. Q. e. d.

De corporis revolutione per hyperbolam ex vi repulſiva.

Fig. 52. 136. Volvatur corpus per hyperbolam AR ex repulſione foci F; ſitque parameter hyperbolæ $=$ P. Sume arcum quemvis infiniteſimum RL, quem corpus certo tempuſculo percurrat. Duc deinde LQ perpendicularem ad FR, tum FT perpendicularem tangenti RT. Dico, vim repul-

pulſivam, qua corpus urgetur in R, exprimi per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$; ac ſi velocitas, quam corpus habet in R, ſit $= u$, exprimi vim repulſivam etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$.

Demonſtro primam partem. Ducatur Lu parallela tangenti RT, ſecans FR productam in u. Exprimet ſane Ru vim repulſivam, qua corpus urgetur in R. Atqui eſt R$u = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (135.). Ergo $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$ exprimit vim repulſivam.

Demonſtro partem alteram. Vis repulſiva in R exprimitur, ut modo oſtendi, per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Atqui eſt LQ $= \frac{FT \times u}{FR}$ (128.), ideoque $\overline{LQ}^2 = \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{\overline{FR}^2}$. Ergo vis repulſiva in R exprimitur etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$.

137. His viſis, dico, vim repulſivam in quovis puncto R ejuſdem hyperbolæ eſſe reciproce proportionalem quadrato diſtantiæ a foco F, nempe eſſe $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$.

Dem. Quoniam volumus, arcum RL eum ſemper ſumi, qui æquali tempore percurratur, erit area RFL perpetuo æqualis (129.). Sit ergo area RFL $= 1$. Atqui eſt LQ proportionalis areæ RFL diviſæ per FR; ergo LQ $= \frac{1}{FR}$, & $\overline{LQ}^2 = \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Eſt autem vis repulſiva $= \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (136.). Erit ergo vis repulſiva $= \frac{1}{P \times \overline{FR}^2}$, rejectaque conſtante P, $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Q. e. d.

138. Conſtat ergo & vim repulſivam, & velocitatem perpetuo variare. Eſt enim vis repulſiva $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$ (137.); velocitas $= \frac{1}{FT}$ (131.); quæ quantitates perpetuo variant.

139. Volvantur duo corpora per duas hyperbolas AR, *ar* ex repulſionibus focorum F, *f*. Sint parametri P, *p*. Vires repulſivæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis. His poſitis ſumantur duo quævis puncta R, & *r*, ducanturque FT, *ft* perpendiculares tangentibus RT, *rt*. Dico, velocitatem in R eſſe ad velocitatem in *r*, uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$. *Fig.* 53. 54.

Dem.

Dem. Sit velocitas in $R = V$; in $r = u$. Erit vis repulſiva in $R = \frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2}$; in $r = \frac{\overline{ft}^2 \times uu}{P \times \overline{fr}^2}$ (136.). Erit etiam, uti nunc ſupponimus, vis repulſiva in $R = \frac{1}{\overline{FR}^2}$, in $r = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. Pone ergo æquationes duas $\frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2} = \frac{1}{\overline{FR}^2}$, & $\frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2} = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. E prima æquatione elicies $V = \frac{\sqrt{P}}{FT}$; ex altera elicies $u = \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Eſt ergo $V : u :: \frac{\sqrt{P}}{FT} : \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Q. e. d. Erit ergo in hujuſmodi hyperbolis $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ generalis formula velocitatem exprimens in quovis puncto R.

140. Volvantur duo corpora per duas hyperbolas A R, *ar*, ex repulſionibus focorum F, *f*. Sint parametri P, *p*. Vires repulſivæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, *f*. His poſitis ſumantur arcus duo quivis infiniteſimi RL, *rl*, qui æqualibus tempuſculis percurrantur, compleanturque areæ RFL, *rfl*. Dico, has areas eſſe proportionales radicibus parametrorum.

Dem. Ductis FT, *ft* perpendicularibus ad tangentes **RT**, *rt*, erit velocitas in R ad velocitatem in *r*, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$ (130.), nec non etiam uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$ (139.). Erit ergo $\frac{RFL}{FT} : \frac{rfl}{ft} :: \frac{\sqrt{P}}{FT} : \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Ergo $RFL : rfl :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$. Q. e. d.

141. Neque id minus valebit, ſi fuerint arcus RL, *rl*, ideoque etiam areæ RFL, *rfl*, aſſignabiles. Poterunt quippe tempora in tempuſcula totidem reſolvi inter ſe æqualia, & areæ in areolas totidem ipſis reſpondentes.

Fig. 55. 56. 142. Volvantur duo corpora per duas hyperbolas AR, *ar* ex repulſionibus focorum F, *f*. Vires repulſivæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis. Dico, tempora, quibus deſcribuntur duæ quævis areæ PFV, *pfu* proportionalia eſſe areis ipſis diviſis per radices parametrorum.

Dem. Sint arcus RL, *rl* percurſi æquali tempore, compleanturque areæ RFL, *rfl*. Tempora, quibus deſcribuntur areæ PFV, *pfu*, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per areas RFL, *rfl* (132.); ſed areæ RFL, *rfl* ſunt uti radices parametrorum (140.). Ergo tempora, quibus deſcribuntur

Digitized by Google

areæ PFV, *pfu*, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per radices parametrorum. Q. e. d.

143. *Problema*. Volvatur corpus per hyperbolam AR ex vi repulſiva foci F. Puta jam ipſum, dum eſt in R, ſola repulſione abripi, atque excurrere ab R verſus D per lineam FR productam in D, ea vi repulſiva, qua urgebatur in R, ipſum perpetuo, & conſtanter urgente. Invenire punctum D, ad quod cum pervenerit, obtineat velocitatem æqualem illi, quam ſe volvens per hyperbolam habebat in puncto R. *Fig.* 57.

Ducatur FT perpendicularis ad tangentem RT; ſitque parameter hyperbolæ $= P$. His poſitis, ſit velocitas in $R = u$. Erit vis repulſiva in eodem puncto $R = \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$ (136.). Sit $RD = x$. Velocitas, quam corpus, excurrens ex R verſus D, obtinet in ipſo puncto D, æqualis eſt duabus radicibus ſpatii ipſius RD ducti in vim repulſivam (124.). Erit ergo velocitas in $D = 2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}}$. Pone ergo æquationem $2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}} = u$. Prodibit hinc x $(RD) = \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$, nempe quarta proportionalis poſt $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri. Q. e. i.

144. Quod ſi punctum R conſtitutum ſit in ipſo vertice A, quoniam ibi FT vertitur in FR, erit $RD = \frac{P}{4}$.

145. *Problema*. Projiciatur corpus e puncto R data quavis directione RT, & data quavis velocitate V. Interim vi repulſiva quavis data G pellatur a dato centro F. Repulſionis autem lex ea ſit, ut vis repellens reciproce proportionalis ſit quadrato diſtantiæ. Invenire curvam RQ, quam corpus percurret. *Fig.* 58.

Quæſtionem ſic expedio. Ducatur FT perpendicularis ad RT. Tum producta FR indefinite in D, fingatur corpus ſola repulſione abreptum, excurrere ab R verſus D vi repulſiva G ipſum perpetuo, & conſtanter urgente; inveniaturque punctum D, ad quod cum corpus pervenerit, obtineat velocitatem æqualem datæ velocitati V. Conſtituta ad hunc modum linea RD, fac eſſe, uti $\overline{FR}^2$, $\overline{FT}^2$, ita RD ad lineam aliam quamdam, cujus quadrupla ponatur linea P. His confectis deſcribatur hyperbola RQ (105), cujus focus exterior ſit F, tangens RT, parameter P. Dico hyperbolam RQ eſſe curvam illam, quam corpus datum percurret.

Demonſtratio ſimillima illius eſt, quam ſupra (106.) indicavimus de vi attractiva agentes, ubi problema ſimillimum propoſuimus. Ad quam ſi redeas, & omnia, uti convenit, huc rite transferas, tibi ipſe facile in hoc etiam problemate, quod de vi repulſiva ponitur, ſatisfacies.

CONCLUSIO.

HAbes adhuc, mi Torquate, nobiliſſimæ illius ſcientiæ; quæ de viribus centralibus tradi ſolet, prima quaſi elementa; quæ ne contemnas velim, propterea quod, nullum certum corpus ſpectantia, in genere ipſo conſiſtant, ideoque in cogitatione tantum poſita eſſe videantur; nam neque illa, quæ in cogitatione tantum ſunt poſita, contemni prorſus debent; & his quidem, quæ adhuc accepiſti, ſi obſervationes modo nonnullæ acceſſerint, ſtatim ſenties, expreſſam quamdam adſpectabilis hujus mundi formam, & quaſi imaginem contineri. Quam imaginem adumbrabo hic leviter, tamquam rudis pictor; tu illam perficies aliquando, ſi voles, atque ornabis; velle autem debebis, ubi & obſervationes plures, ſubtilioreſque collegeris, & longius in hac ipſa virium centralium doctrina provectus fueris.

Ac primum quidem, ut ab initio ultimo exordiar, certiſſimis aſtronomorum obſervationibus ſatis conſtat, planetas omnes circa ſolem volui, mercurium breviori ambitu, venerem latiori; quam deinde mars excipit, tum jupiter, atque is demum, qui omnes ſua converſione complectitur, ſaturnus. Atque hi quidem planetæ primarii dicuntur. His Copernicus terram addit inter veneris & martis orbitas ſitam; quam hypotheſim aſſumunt plerique omnes, ſimplicitate rei ducti atque elegantia. Quid quod commodiſſima eſt ad omnia?

Sunt autem planetæ alii minores, qui circa primarios volvuntur, eorumque ſatellites appellantur. Horum quatuor volvuntur circa jovem, quinque circa ſaturnum; ac ſi terram in planetis primariis numeramus, erit ei luna pro ſatellite. Satellites planetæ etiam ſecundarii dicuntur.

Ad primarios redeamus. In his Keplerus philoſophus longe præſtantiſſimus obſervationes habet duas, quibus nihil illuſtrius; quæ quoniam perpetuæ ſunt, habentur pro legibus.

Duas

Duas has leges, ſive obſervationes, ſeorſim conſideremus, ut appareat, quid, his poſitis, generalis virium centralium theoria in planetis nos doceat.

Prima Kepleri lex eſt: Cum planeta quiſque per ellipſim quamdam volvatur, cujus focum alterum ſol occupat; ſuum ſic motum in ea revolutione temperat, ut areæ, quæ in illo foco, ubi ſol ſedet, terminantur, proportionales ſint temporibus, quibus a planeta deſcribuntur.

Hic jam, ſi ea conſulas, quæ ſupra numero 39 tradidimus, & facile & ſtatim intelliges, vim quamdam in natura eſſe oportere, quæ planetas ſingulos perpetuo urgeat verſus eum focum, quem ſol tenet; perinde ac ſi ipſe ſol planetas ſingulos ad ſe traheret, nihilque aliud eſſet in planetis ſingulis vis centripeta, quam ipſa ſolis attractio. Hinc omnis Nevtonianorum phyſica manaſſe videtur.

Quod ſi ea repetas, quæ numeris *61*, & *62* demonſtravimus, compertum jam tibi erit, vim centripetam cujuſque planetæ ſic per totum ejuſdem planetæ curſum variare, ut ſit ubique reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ a ſole. Ac ſi ellipſeos, quam planeta percurrit, & majorem axem cognitum habeas & parametrum (utrumque autem ex obſervatione cognoſces) nihil jam erit expeditius, quam vires centripetas varias, quas planeta idem in datis quibuslibet punctis obtinet, inter ſe comparare. Neque minus velocitates comparare poteris, ſi ea repetas, quæ numeris 40, & 41 demonſtrata ſunt; nam varias eſſe in eodem planeta etiam velocitates, ex numero *63* apparet. Hæc tibi erunt e prima Kepleri lege, ſi vel tantiſper ad generalem, quam tradidimus, theoriam reſpexeris, apertiſſima.

Altera Kepleri lex eſt. Si duorum quorumlibet planetarum converſiones inter ſe conferantur, numquam non invenientur quadrata temporum periodicorum proportionalia cubis axium majorum.

Licet jam ergo illud ad planetas transferre, quod numero 73 demonſtravimus, ac ſtatuere vires centripetas duorum quorumlibet planetarum, ſi inter ſe conferantur, reciproce proportionales eſſe quadratis diſtantiarum a ſole. Quo ſtatim apparet, ſolem (ſi vis quidem planetarum centripeta ſolis attractio eſt) attractivam neſcio quam vim ad omnia planetarum ſpatia diffundere, quæ ſit ubique quadrato diſtantiæ pro-

Digitized by Google

portionalis; planetaſque omnes eodem attractionis genere a ſole trahi.

Hic jam vides, quid illa ſit adeo celebris planetarum in ſolem gravitatio, in qua Nevtoniani adeo gloriantur. Jure illi quidem ac merito. Quamquam gravitationem neſcio quam & Keplerus, vir longe graviſſimus, præſenſiſſe fertur, & Carteſius explicaſſe, philoſophus cum excellentiſſimo quoque comparandus; nulla eſt enim philoſophiæ pars, in qua non longe præſtiterit. Sed ille cum gravitationis opinionem e vortice quodam ſuo deduxiſſet; nutante vortice opinio quoque nutare viſa eſt; ut melius ſibi conſuluiſſe Nevtoniani videantur, qui obſervatione, & mathematica ratione contenti gravitationem poſuerunt, cauſam quærere noluerunt. Sed ad propoſitum redeamus.

Cum ſint ergo vires centripetæ duorum quorumlibet planetarum, ſi inter ſe comparentur, reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a ſole; jam illa omnia ad planetas traduci poterunt, quæ numeris 67. 69. 70. 71 diſſeruimus. Quare & velocitates, quas duo quivis planetæ, in quibuslibet datis punctis habent, comparare poteris; & facile intelliges, areas, quas planetæ æquali tempore deſcribunt, parametrorum radicibus proportionales eſſe; & tempora periodica proportionalia eſſe totis areis, ſi hæ quidem radicibus parametrorum dividantur. Quæ theoremata & obſervatione probantur, & ſunt ex ipſa virium centralium theoria uſque adeo manifeſta, ut ſit inutilis obſervatio. Hæc adhuc dixi de planetis primariis.

Eadem facile ad ſecundarios transferentur. Quippe quia obſervationibus conſtat, ſecundarios omnes circa primarios ſuos non ſecus volvi, quam primarios circa ſolem. Itaque quemadmodum ſol ad ſe trahere primarios dicitur, proclive eſt credere, primarios etiam ſatellites ſuos ad ſe trahere. Eſt ergo communis quædam ſatellitum gravitatio in primarios; & ea quidem, quantum ſcire poſſumus, ejuſdem plane generis, cujus eſt primariorum gravitatio in ſolem.

Quo loco dignum eſt animadvertere, vim centripetam, quæ Lunam verſus terram urget, terreſtrium corporum gravitati eſſe plane ſimilem. Etenim ſi, obſervando, ſpatium notetur, quod luna, in illa tanta a terra diſtantia, vi centripeta, uno minuto temporis conficit; tum ex eo colligatur, quantum ſpatii eodem tempore confectura ſit, ſi hic inter terreſtria

ver-

Digitized by Google

verſetur; eam facile apparebit, idem ſpatium confecturam eſſe, quod hæc terreſtria pari tempore cadendo conficiunt.

Videtur ergo luna eodem gravitationis genere in terram gravitare, quo terreſtria quæque gravitant; ut ſit jam & terreſtribus corporibus, & lunæ, & ſatellitibus aliis, & planetis omnibus gravitatio quædam, attractioque communis. Hinc illa in philoſophorum ſcholas pervaſit opinio, ut credantur omnia ſe mutuo trahere; qua opinione qui utuntur ad quidlibet, nihilque non attractione explicant, quoniam genus perſæpe mutant, & alias leges comminiſcuntur, atque alias, vimque ipſam in repulſivam arbitratu ſuo vertunt, videant ne attractionis minuant dignitatem. Simplicitatem certe, qua maxime commendabatur, illi adimunt. Sed ad cæleſtia redeamus, in quibus attractio eſt illuſtrior.

Trahentibus ſe mutuo planetis omnibus (oportet enim ſic eſſe, ſi omnia quidem ſe mutuo trahunt) nemo ſane mirabitur, quod turbentur illi interdum, & ab eo curſu, quem ſolis attractio poſtulat, aberrent non nihil; non quod ſoli non obtemperent, quemadmodum ſupra poſuimus; ſed quia planetis etiam aliis, præſertim ſi propius acceſſerint, eſt illis obtemperandum. Et ſane turbationes, aberrationeſque in planetis varias aſtronomi diligentiſſimi compertas habent; conſentienteſque cum attractione mutua invenerunt, eas quidem, in quibus calculos experiri voluerunt; eſt enim in multis implexa adeo ſupputatio, & longa, ut ferri vix poſſit. Perexiguæ autem ſunt turbationes illæ, quas dixi, aberrationeſque, ut obſervatorem, niſi diligentiam adhibeat, facile fugiant. Cujus rei cauſſa eſſe poteſt, quod planetarum maſſæ exiguæ admodum ſint, ſi cum ſolis maſſa comparentur, ſitque idcirco planetæ cujuſvis attractio, ſi cum ſolis attractione conferatur, prope contemnenda. Hæc fuſius non perſequor; nam neque meum id eſſe arbitror, nec loci hujus.

Ceterum quæ ſit maſſarum proportio, in ſole præſertim, in terra, in jove, in ſaturno, ex iis cognoſci poteſt, quæ numero 74 demonſtravimus. Sunt enim ſol, terra, jupiter, ſaturnus, ut ante diximus, centralia quædam corpora, circa quæ planetæ alii volvuntur ſive primarii, ſive ſecundarii, ellipſes deſcribentes varias, in quarum focis illa ſedent. Jam ergo ſi & axes ellipſium harum cognoveris, & periodica planetarum tempora, id quod obſervationes docebunt, ex eo, quem

dixi,

Digitized by Google

dixi, numero 74 proportionem ſtatim colliges, quæ inter centralium illorum corporum maſſas intercedit. Hinc apparebit, quanto ſolis maſſa planetarum omnium maſſas ſuperet. Cognitis porro planetarum maſſis, (ut ne phyſicorum oblectamenta alia prætermittamus) quoniam & magnitudines ex obſervatione cognoſcuntur; nihil negotii erit denſitates etiam cognoſcere. Quibus rebus cognitis facile innoteſcet, quantum corpora quæque gravitent, ſi vel in ſole, vel in terra ponantur, vel in jove, vel in ſaturno. Quæ aſtronomi quidem vix curant; phyſici curioſiores conſectantur.

Illud magis ad aſtronomos pertinet, quod cum planetæ exigua admodum maſſa ſint, uti diximus; ſolem, etſi ipſum quoque ad ſe trahunt, ſinunt tamen manere quaſi immobilem. Fac enim, ſolem & planetam quemvis, trahentes ſe mutuo, jam inde ab initio rerum ſimiliter fuiſſe projectos, uti duo illa corpora, de quibus ſupra in quinto capite diſſeruimus. Oportebit ſane ſolem circa commune gravitatis centrum ellipſim quamdam deſcribere, quæ illi reſpondeat, quam planeta deſcribit, eique ſit plane ſimilis. Id colliges in illo, quod dixi, capite ex numero 111. & ſequentibus. Quod ſi planetæ maſſa ad maſſam ſolis ſit longe minima, conſequens erit, ut commune gravitatis centrum centro ſolis quamproximum ſit; deſcribetque ſol ellipſim uſque adeo parvam, vix ut moveri videatur. Ac motus quidem ſolis non uni tantum planetæ reſpondere debet, ſed multis; & modo huc verti, modo illuc pro varia planetarum vi diſtantia, ac ſitu; verum cum tenuiſſimæ planetarum omnium maſſæ ſint, ſol utique deturbari ſe ab nullo patietur; trepidationes tantum quaſdam accipiet, oſcillationeſque quam minimas.

Res ipſa monere videtur, ut de cometis quoque dicamus, qui longiſſime advenientes perſæpe intra planetarum orbitas ſe immittunt, ac planetæ haberi volunt, Nevtono probante. Et ſane ſi illa tenent, quæ de communi corporum omnium attractione modo diximus, oportet, cometas quoque a ſole trahi. Ac ſi illa repetamus, quæ in Appendice Cap. IV. monuimus, manifeſtum erit, debere eos, ut qui tranſverſim projecti ſunt, ſectiones quaſdam conicas ſuo curſu deſcribere, in quarum foco ſol ſedeat, ut planetas pulcherrime imitari videantur. Itaque, ut planetarum, ſic etiam cometarum viæ definiri jam poterunt, & conſtitui tempora, & reverſiones præcognoſci,

ſci, in quibus magna cum ſpe recentiorum aſtronomorum exercetur labor; & vero obſervationes, quas quidem ad calculos revocaverunt, egregie adhuc reſpondere viſæ ſunt, ut appareat in omnibus Nevtoni felicitas.

Hæc dixi, ut intelligas, quantas phyſicis commoditates jam illa afferant, quæ de viribus centralibus dicta a nobis ſunt; etſi illa cum diceremus, ad nullum certum corpus reſpicientes in genere ipſo conſiſteremus. Quæ ſi animo, mi Torquate, infixeris penitus, feceriſque ut ſint tibi in quæſtione qualibet paratiſſima, putare debebis, te etiam in phyſicis non parum profeciſſe.

INDEX.

	Epiſtola ad Varenum.	pag. 3
	Prolegomena.	7
Cap. I.	*De motu curvilineo generatim.*	13
Cap. II.	*De revolutione corporis per circulum.*	18
Cap. III.	*De revolutione corporis per ellipſim.*	23
Cap. IV.	*De revolutione corporis vel per parabolam, vel per hyperbolam.*	32
Cap. V.	*De revolutionibus duorum corporum ſe mutuo trahentium.*	44
Cap. VI.	*De vi repulſiva.*	50
	Concluſio.	58

Vidit

Vidit D. Paullus Joſephus Scati Cleric. Regul. S. Paulli, & in Eccleſia Metropolitana Bononiæ Pœnitentiarius pro Eminentiſſimo, ac Reverendiſſimo Domino D. Vincentio Cardinali Malvetio Archiepiſcopo Bononiæ, & Sac. Rom. Imp. Principe.

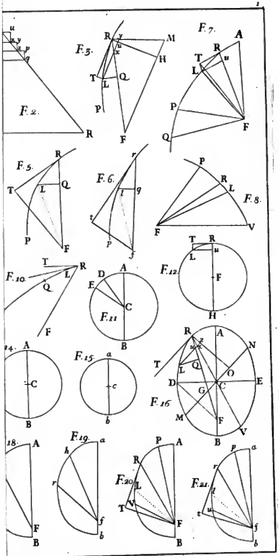
Die 26 Octobris 1761.

IMPRIMATUR.

Fr. Petrus Paullus Salvatori Vic. Gener. Sancti Officii Bononiæ.

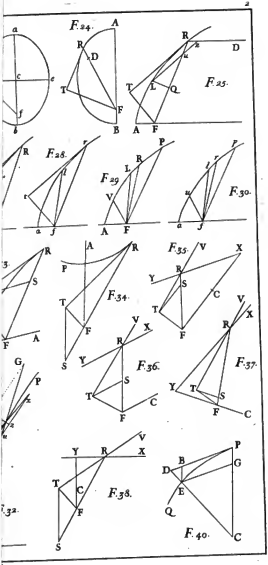
Digitized by Google

6 3 275



Digitized by Google

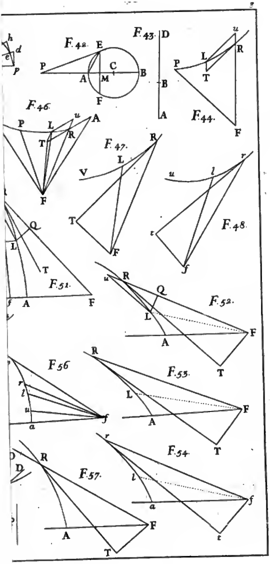
Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

5 3 275



Digitized by Google

Z 5 3 275 (Ph) .9274

Digitized by Google

68

Digitized by Google

005663274

Digitized by Google

Digitized by Google